KUUSI LUONNEHDINTAA STURMIN SANOILLE

Jarkko Peltomäki

Pro gradu -tutkielma
Marraskuu 2011

MATEMATIIKAN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Sisältö

1 Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee nk. Sturmin sanoja. Sturmin sanat ovat äärettömiä binäärisanoja, joilla on se erityinen ominaisuus, että niillä on täsmälleen $n+1$ erilaista tekijää, joiden pituus on n, kaikilla $n \geq 0$. Tutkielmassa tullaan osoittamaan, että tämä määritelmä tarkoittaa, että Sturmin sanat ovat mahdollisimman yksinkertaisia jaksottomia ja äärettömiä binäärisanoja.

Sturmin sanoille on olemassa hämmästyttävän monia ekvivalentteja määritelmiä eli luonnehdintoja. Luonnehdintojen määrän lisäksi on mielenkiintoista miten erilaisia luonnehdinnat ovat. Esimerkkejä luonnehdinnoista ovat edeltävässä kappaleessa annettu määritelmä ja tasosuoran diskretisoinnin tulkinta äärettömänä sanana (ks. luku 5). Ei ole aluksi selvää, että näillä asioilla olisi mitään yhteyttä.

Tässä tutkielmassa esitetään kuusi luonnehdintaa Sturmin sanoille, sekä näiden sanojen perusominaisuudet. Nämä luonnehdinnat kattavat kaikki hyvin tunnetut ja klassiset sekä muutamat uudemmat luonnehdinnat. Suuri osa esitettävistä luonnehdinnoista koskee jonkinlaista kompleksisuutta: vaikkapa erilaisten samanpituisten tekijöiden lukumäärää tai erilaisten tietynpituisten palindromitekijöiden määrää. Tutkielma ei pyri tyhjentävästi käsittelemään kaikkia Sturmin sanojen ekvivalentteja määritelmiä, vaan kattavasti esittämään valitut kuusi luonnehdintaa. Melkeinpä jokikinen väite todistetaan kokonaan ja täsmällisesti. Tutkielma kuuluu ns. sanojen kombinatoriikan alalle, mutta tämän aiheen tuntemus ei ole tutkielman lukemiseksi välttämätöntä. Tuntemus on toki eduksi, mutta kaikki aivan perusteista lähtien esitetään.

Sturmin sanat ovat kiinnostavia itsessäänkin, mutta niillä on myös sovelluksia. Ne liittyvät esimerkiksi fysiikkaan ns. kvasikristallien kautta [Ber96]. Lisäksi sanoilla on yhteys irrationaalisten lukujen ketjumurtolukuesityksiin ja siten lukuteoriaan myöhemmin esiteltävien mekaanisten sanojen kautta [Cri+93] [Ber96]. Tässä työssä ei tutkita sovelluksia, vaan pysytellään puhtaasti sanojen kombinatoriikan teoriassa.

Luvuissa 2 ja 3 esitetään tutkielman kannalta tarpeelliset sanojen kombinatoriikan peruskäsitteet. Erityisesti kiinnitetään huomiota äärettömiin sanoihin – jollaisia Sturmin sanat ovat – ja osoitetaan yhteys ns. kompleksisuusfunktion ja äärettömän sanan jaksollisuuden välillä.

Luvussa 4 määritellään Sturmin sanat, sekä johdetaan niiden tärkeitä ominaisuuksia. Tuloksiin kuuluu muun muassa se seikka, että Sturmin sanat ovat jaksottomia. Lisäksi tutkitaan tunnettua Fibonaccin sanaa, ja osoitetaan, että se on Sturmin sana. Lopuksi esitetään luonnehdinta Sturmin sanoille tasapainoisuuden avulla.

Seuraava luku käsittelee mekaanisia sanoja, jotka ovat tasosuorien diskretisointeja. Tässä luvussa osoitetaan, että Sturmin sanat ovat irrationaalisia mekaanisia sanoja – myöskin klassinen tulos. Myös mekaanisia sanoja voidaan tarkastella useasta eri näkökulmasta, ja näistä vaihtoehtoisista näkökulmista tarkastellaan lyhyesti leikkaussanoja. Lisäksi mekaanisten sanojen teoriaa sovelletaan ns. Sturmin morfismeihin.

Luvussa 6 tutkitaan ketjuja, joiden avulla esitetään jälleen uusi luonnehdinta ketjutasapainoisuuden ja eräänlaisen ketjukompleksisuuden avulla. Esitetyt tulokset ovat analogisia useiden luvun 4 tulosten kanssa.

Ketjukompleksisuuden jälkeen luvussa 7 tarkastellaan jälleen erilaista näkökulmaa Sturmin sanoihin, palindromikompleksisuutta. Osoitetaan, että Sturmin sanoissa esiintyvien palindromien lukumäärä luonnehtii Sturmin sanat täysin. Lisäksi todistetaan yleisluontoisempia sanojen kombinatoriikan tuloksia konjugaateista ja sanojen kommutoinnista.

Seuraavassa luvussa esitetään viimeinen tutkielmaan otettu Sturmin sanojen luonnehdinta. Luvussa pohditaan kysymystä siitä kuinka pitkä on lyhin sellainen Sturmin sanan tekijä, joka sisältää tekijöinään kaikki n-pituiset ko. Sturmin sanan tekijät. Vastaus on yksinkertainen: $2n$. Hieman yllättäen osoitetaan, että tämä ominaisuus määrittää Sturmin sanat täydellisesti.

Luvussa 9 kootaan yhteen aiemmin todistetut luonnehdinnat ja tärkeät tulokset. Lisäksi esitellään lyhyesti muita luonnehdintoja, joita ei tutkielmassa muuten käsitellä.

Nimensä mukaisesti viimeinen luku kertoo lyhyehkösti Sturmin sanojen historiasta.

Lukuja ei ole välttämätöntä lukea järjestyksessä. Lukujen 2–4 tulokset ja määritelmät ovat välttämättömiä kaikille myöhemmille luvuille, mutta luvut 5-8 voi lukea missä järjestyksessä tahansa.

2 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa esitetään tarvittavat sanojen kombinatoriikan peruskäsitteet ja perusominaisuudet. Esitettävät asiat käydään läpi lyhyehkösti, jopa intuitiivisesti. Perinpohjaista käsittelyä kaipaava lukija voi etsiä mielenrauhaa alan perusteoksista [Lot83] ja [Lot02].

2.1 Sanat

Tässä tutkielmassa luonnollisten lukujen joukko on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, lisäksi merkitään $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aakkosto on epätyhjä äärellinen joukko symboleja, joita kutsutaan *aakkosiksi*. Aakkostoa merkitään usein kirjaimella A, ja jatkossa joukko A ymmärretään aakkostoksi mikäli ei toisin mainita. *Sana* yli aakkoston A on sen aakkosista muodostettu äärellinen merkkijono. Sanaksi käsitetään myös *tyhjä sana*, jota merkitään symbolilla ε. Kaksi sanaa ovat yhtä suuret, mikäli ne koostuvat samoista aakkosista samassa järjestyksessä. Kaikkien sanojen joukkoa yli aakkoston A merkitään A^*. Lisäksi merkitään $A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Sanan w *pituus* $|w|$ kertoo sen muodostavien aakkosten lukumäärän. Sana ε on se yksikäsitteinen sana, jonka pituus on 0. Merkintä $|w|_a$ tarkoittaa aakkosen a esiintymien lukumäärää sanassa w.

Sanoille määritellään luonteva operaatio – *sanojen yhdistäminen*. Sanat u ja v yhdistetään kirjoittamalla niiden aakkoset peräkkäin: uv. Yhdistämisoperaatio on ilmeisesti assosiatiivinen. Sanaa uv kutsutaan sanojen u ja v tuloksi, ja tästä tulosta puhuttaessa käytetäänkin usein kertolaskun yhteydestä tuttuja ja luontevia ilmaisuja ja merkintöjä. Esimerkiksi merkitään $ww = w^2$. Merkinnällä w^* tarkoitetaan sanan w potenssien joukkoa $\{w^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Lisäksi merkitään $wP = \{wu : u \in P\}$ ja $PQ = \{uv : u \in P, v \in Q\}$, kun w on sana ja P ja Q sanajoukkoja.

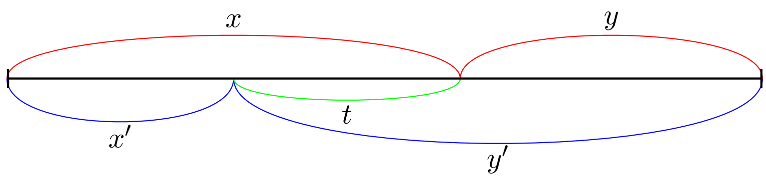
Sana w on sanan x *tekijä*, jos voidaan kirjoittaa $x = uwv$ joillain sanoilla u ja v. Sanan x kaikkien tekijöiden joukkoa, *tekijäjoukkoa*, merkitään $\mathcal{F}(x)$. Joukon $\mathcal{F}_n(x)$ määritellään koostuvan sanan x sellaisista tekijöistä, joiden pituus on n. Joukon $\mathcal{F}_n(x)$ sanoja kutsutaan sanan x *n-tekijöiksi*.

Sana w on sanan x *prefiksi* (*suffiksi*), mikäli voidaan kirjoittaa $x = wu$ ($x = uw$) jollain sanalla u. Joskus merkitään $w \leq x$, kun w on sanan x prefiksi. Prefiksi (suffiksi) on *aito*, jos $w \neq x$. Aidosta prefiksistä w voidaan käyttää merkintää $w < x$. Sana w on *n-prefiksi*, jos sana w on prefiksi ja sen pituus on n. Vastaavasti määritellään *n-suffiksi*.

Sanoilla on erityisen tärkeä *jaollisuusominaisuus*. Sen mukaan jos on voimassa yhtälö

$$xy = x'y'$$

joillain $x, x', y, y' \in A^*$, niin joko on olemassa sellainen $t \in A^*$, että $x = x't$ (jolloin $ty = y'$), tai on olemassa sellainen $s \in A^*$, että $x' = xs$ (jolloin $y = sy'$). Ensimmäistä tapausta kuvastaa alla oleva kuva, josta nähdäänkin, että asia on melkeinpä itsestään selvä.



Olkoon $w = a_1a_2 \cdots a_n, a_i \in A$. Sanan w *peilaus* on sana $\widetilde{w} = a_n \cdots a_2a_1$ – ts. peilaus $\widetilde{w}$ koostuu sanan w aakkosista käännettynä päinvastaiseen järjestykseen. Toisinaan käytetään merkintää $w^{\sim}$, esimerkiksi ilmaisemaan seuraava tosiseikka:

$$(uv)^{\sim} = \widetilde{v}\widetilde{u}.$$

Jos on voimassa, että $w = \widetilde{w}$, niin sanaa w kutsutaan *palindromiksi*.

Olkoot A ja B aakkostoja. Kuvausta $\psi : A^* \to B^*$ kutsutaan *morfismiksi*, jos kaikilla $u, v \in A^*$ on voimassa, että $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$. Huomaa, että välttämättä $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$, sillä kuvauksen morfisuudesta seuraa, että $\psi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon\varepsilon) = \psi(\varepsilon)\psi(\varepsilon)$, mikä on voimassa vain, jos $|\psi(\varepsilon)| = 0$ eli $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$. Selvästi morfismi $\psi : A^* \to B^*$ määräytyy täysin jo aakkosten $a \in A$ kuvista $\psi(a)$. Morfismit monesti määritelläänkin antamalla vain aakkoston alkioiden kuvat. Morfismia ψ kutsutaan *lyhentämättömäksi* mikäli $\psi(A^+) \subseteq B^+$. Toisin sanoen lyhentämätön morfismi ei hävitä aakkosia. Siispä lyhentämättömälle morfismille ψ on voimassa $|\psi(w)| \geq |w|$ kaikilla $w \in A^*$. Morfismin ψ *peilaus* $\widetilde{\psi}$ määritellään kaavalla $\widetilde{\psi}(u) = (\psi(u))^{\sim}$.

2.2 Äärettömät sanat

Aakkoston A aakkosista muodostettu jono $a_1a_2 \cdots$ on oikealle *ääretön sana*. Niiden joukkoa merkitään A^ω. Joukko A^ω muodostuu siis aakkosjonoista, jotka voidaan indeksoida luonnollisilla luvuilla. Vastaavasti määritellään vasemmalle äärettömät sanat $\cdots a_2a_1$, joiden joukkoa merkitään ${}^{\omega}A$. Kaksipuoleisesti äärettömät sanat $\cdots a_ia_{i+1}\cdots$ indeksoidaan kokonaislukujen avulla, ja niiden joukkoa merkitään $A^{\mathbb{Z}}$. Jatkossa tarkastellaan pääasiassa oikealle äärettömiä sanoja, ja sovitaan, että kun puhutaan äärettömistä sanoista, niin tarkoitetaan juuri oikealle äärettömiä sanoja.

Äärellisten sanojen yhteydessä esitellyt käsitteet laajenevat pitkälti luontevalla tavalla koskemaan äärettömiä sanoja. Erona on, että tulo uv ei ole määritelty, kun $u, v \in A^{\omega}$ tai $u \in A^{\omega}, v \in A^*$. Tästä seuraa, että vain äärellinen sana voi olla äärettömän sanan prefiksi, ja vain ääretön sana voi olla äärettömän sanan suffiksi. Äärettömän sanan äärelliset tekijät ovat joukon A^* alkioita. Äärettömät sanat $x = a_1a_2\cdots$ ja $y = b_1b_2\cdots$, $a_i, b_i \in A$, ovat erisuuret, jos on olemassa sellainen luku $n \in \mathbb{N}$, että $a_n \neq b_n$. Sovitaan, että $|x| = \infty$, kun x on ääretön.

Otetaan käyttöön merkintä z^{ω} tarkoittamaan sanaa, joka saadaan toistamalla sanaa z äärettömän monta kertaa: $zzz\cdots$ Ääretön sana x on *jaksollinen*, jos voidaan kirjoittaa $x = y^{\omega}$ jollain $y \in A^+$. Sana x on *lopulta jaksollinen* (tai *asymptoottisesti jaksollinen*), jos x on muotoa uy^{ω} joillain $u \in A^*$ ja $y \in A^+$. Jokainen jaksollinen ääretön sana on myös lopulta jaksollinen. Mikäli on tarpeen korostaa eroa jaksollisen ja lopulta jaksollisen sanan välillä, voidaan sanan jaksollinen sijaan käyttää ilmaisua *täysin jaksollinen.* Sana y on sanan x *jakso*, ja sanan y pituutta $|y|$ kutsutaan *jaksonpituudeksi.* Sana x on *jaksoton*, mikäli se ei ole lopulta jaksollinen.

Lyhentämätön morfismi $\psi : A^* \to B^*$ laajenee luonnollisella tavalla kuvaukseksi $A^{\omega} \to B^{\omega}$: $\psi(a_1a_2\cdots) = \psi(a_1)\psi(a_2)\cdots$ Näin saatua laajennusta kutsutaan myös morfismiksi ja sitä merkitään samoin symbolilla ψ.

Olkoon $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ jono äärellisiä sanoja yli aakkoston A. Sanotaan, että jono (u_n) *suppenee* kohti ääretöntä sanaa x, jos jokaista sanan x prefiksiä y kohti on olemassa sellainen luku $n_0 \in \mathbb{N}$, että $y \leq u_n$ kaikilla $n \geq n_0$. Sanaa x kutsutaan sanajonon (u_n) *raja-arvoksi*, ja tällöin merkitään $x = \lim_{n\to\infty} u_n$. Sanajono (u_n) on *suppeneva*, jos se suppenee jotakin sanaa kohti.

Lemma 2.1. *Olkoon $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ suppeneva jono äärellisiä sanoja. Tällöin jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että sanajonolla (u_n) on kaksi erisuurta raja-arvoa x ja y. Voidaan kirjoittaa $x = uax'$ ja $y = uby'$, missä u on sanojen x

ja y pisin yhteinen prefiksi ja a ja b ovat erisuuria aakkosia. Suppenemisen määritelmän nojalla on olemassa sellaiset luvut $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, että $ua \leq u_n$, kun $n \geq n_0$, ja $ub \leq u_n$, kun $n \geq n_1$. Siis, kun $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, niin $ua, ub \leq u_n$. Koska $|ua| = |ub|$, niin on oltava, että $a = b$, mikä on ristiriita. $\square$

Esimerkki 2.2. Määritellään $u_n = a^n b^n$. Tällöin sanajono $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti sanaa a^ω, mikä on ilmeistä suppenemisen määritelmän nojalla.

Äärettömän sanan rakentaminen toistamalla jotakin morfismia on luonteva ajatus. Seuraava lemma kertoo milloin näin voi tehdä.

Lemma 2.3. *Olkoon $\psi : A^* \to A^*$ sellainen lyhentämätön morfismi, että $\psi(a) = as$ jollain $a \in A$ ja $s \in A^+$. Määritellään sanajonot $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ seuraavasti:*

$$u_n = \psi^n(a), \qquad v_n = \psi^n(s).$$

Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(i) $u_{n+1} = u_n v_n$,

(ii) $u_{n+1} = a v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$,

(iii) ääretön sana $x = as\psi(s)\psi^2(s)\cdots\psi^n(s)\cdots$ *on jonon* (u_n) *raja-arvo,*

(iv) sana x on morfismin ψ yksikäsitteinen aakkosella a alkava kiintopiste.

Todistus. (i) Suoraan laskemalla saadaan, että

$$u_{n+1} = \psi^{n+1}(a) = \psi^n(\psi(a)) = \psi^n(as) = \psi^n(a)\psi^n(s) = u_n v_n.$$

(ii) Väite on voimassa tapauksessa $n = 0$. Käyttäen induktiota ja kohtaa (i) saadaan, että $u_{n+1} = u_n v_n = a v_0 v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$.

(iii) Tämä seuraa välittömästi kohdasta (ii) suppenemisen määritelmän nojalla.

(iv) Koska $\psi(u_n) = u_{n+1}$ ja $x = \lim_{n\to\infty} u_n$, niin $\psi(x) = x$. Olkoon y myös aakkosella a alkava morfismin ψ kiintopiste. Nyt edeltävään tapaan $as\psi(s)\psi^2(s)\cdots\psi^n(s) \leq \psi^n(y)$. Koska toisaalta $\psi^n(y) = y$, niin sanoilla x ja y on mielivaltaisen pitkä yhteinen prefiksi. Siis $x = y$. $\square$

Tähän tapaan morfismin avulla muodostettua ääretöntä sanaa kutsutaan *morfiseksi sanaksi*, ja edeltävin merkinnöin kirjoitetaan $x = \psi^\omega(a)$.

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan sanoja yli aakkoston $\{0, 1\}$. Määritellään morfismi

$$\mu : \begin{array}{l} 0 \mapsto 01, \\ 1 \mapsto 10. \end{array}$$

Morfismin μ avulla saadaan morfinen sana $t = \mu^{\omega}(0)$. Sen alku menee seuraavasti:

$$t = 01101001100101101001011001101001 \cdots$$

Sana t on kuuluisa Thuen–Morsen sana; yleisesti katsotaan, että Axel Thuen tutkimukset muun muassa sanan t parissa 1900-luvun alussa panivat alulle matematiikan haaran, jota kutsutaan sanojen kombinatoriikaksi. Marston Morse löysi sanan t riippumattomasti myöhemmin. Sanan ominaisuuksiin kuuluu muun muassa se, että se ei sisällä tekijänään minkään tekijänsä w kuutiota w^3. Lisätietoa sanasta on teoksen [Lot83] luvussa 2.

3 Kompleksisuusfunktio ja jaksollisuus

Tässä luvussa tutkitaan pian määriteltävää kompleksisuusfunktiota ja sen yhteyttä äärettömien sanojen jaksollisuuteen. Tulokset ovat myöhemmin hyödyksi, kun tutkitaan Sturmin sanoja. Päätulos on lause 3.7. Tulokset perustuvat artikkeleihin [CH73] ja [MH38].

Määritelmä 3.1. *Kompleksisuusfunktio* $\mathcal{P}$ kertoo kuinka monta erilaista n-tekijää sanassa on kutakin lukua $n \geq 0$ kohti. Tarkemmin ilmaistuna

$$\mathcal{P}(x, n) = |\mathcal{F}_n(x)|,$$

missä x on mikä tahansa äärellinen tai ääretön sana.

Ilmeisesti $\mathcal{P}(x, 0) = 1$ ja $\mathcal{P}(x, m) = 0$, kun $m > |x|$. Luku $\mathcal{P}(x, 1)$ ilmaisee sanassa x esiintyvien aakkosten lukumäärän. Lisäksi jos x on ääretön sana, niin $\mathcal{P}(x, n) \leq \mathcal{P}(x, n + 1)$ kaikilla $n \geq 0$, sillä kutakin tekijää voidaan aina laajentaa oikealle. Voimassa on myös epäyhtälö $\mathcal{P}(w, n + m) \leq \mathcal{P}(w, n)\mathcal{P}(w, m)$, sillä kukin $(n + m)$-tekijä muodostuu peräkkäin laitetuista n- ja m-tekijästä, ja näin erilaisia kombinaatioita saadaan korkeintaan $\mathcal{P}(w, n)\mathcal{P}(w, m)$ kappaletta.

Kun on kirjoitettu $x = a_1a_2 \cdots a_n$, missä $a_i \in A$, niin merkitään $[i, j]_x = a_ia_{i+1} \cdots a_{j-1}a_j$, jos $1 \leq i \leq j \leq |x|$. Sanan x ollessa asiayhteydestä selvä alaindeksi x voidaan jättää pois.

Olkoon X epätyhjä joukko sanoja. Sanan $u \in X$ (oikea) *laajennus* on sana $ua \in X$, missä a on mikä tahansa aakkonen. Mikäli sanalla u on yksikäsitteinen laajennus joukossa X, niin sanaa u kutsutaan *jakautumattomaksi* (engl. conservative). Mikäli laajennuksia on useampia, on sana u (oikealta) *jakautuva* (engl. right special). Puhuttaessa sanan x jakautuvista ja jakautumattomista tekijöistä valitaan $X = \mathcal{F}(x)$.

Lemma 3.2. *Olkoon x ääretön sana. Jos $\mathcal{P}(x, n) = \mathcal{P}(x, n + 1)$ jollain $n \geq 1$, niin sana x on lopulta jaksollinen. Erityisesti sanan x jaksonpituus $\theta \leq \mathcal{P}(x, n)$.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{P}(x, n) = \mathcal{P}(x, n + 1)$. Kirjoitetaan $x = a_1a_2 \cdots$, $a_i \in A$, ja merkitään $m = \mathcal{P}(x, n)$. Sanalla x on siis m erilaista n-tekijää.

Sanan x n-tekijät ovat jakautumattomia. Nimittäin mikäli jokin n-tekijä olisi jakautuva, niin sanalla x olisi ainakin $m + 1$ kappaletta $(n + 1)$-tekijöitä eli $\mathcal{P}(x, n + 1) > \mathcal{P}(x, n)$, mikä on vastoin oletusta.

Tarkastellaan sitten n-tekijöitä $[j+1, j+n]$, $j \geq 0$. Koska sanalla x on vain m erilaista n-tekijää, niin jollakin $k \geq 0$ on voimassa, että

$$[k+1, k+n] = [k+1+\theta, k+n+\theta] \tag{3.1}$$

jollakin $0 < \theta \leq m$. Näytetään sitten induktiolla, että

$$a_{k+l} = a_{k+l+\theta} \quad \text{kaikilla } l \geq 1. \tag{3.2}$$

Yhtälö (3.2) on voimassa luvuille $l = 1, 2, \ldots, n$ yhtälön (3.1) nojalla. Oletetaan sitten, että yhtälö (3.2) on voimassa, kun $l = 1, 2, \ldots, t \geq n$. Tarkastellaan niitä n-tekijöitä u ja v, jotka loppuvat vastaavasti aakkosiin a_{k+t} ja $a_{k+t+\theta}$. Induktio-oletuksen nojalla $u = v$. Aiemmin todetun nojalla n-tekijät u ja v ovat jakautumattomia, joten niitä seuraa sama aakkonen. Siis yhtälö (3.2) on voimassa myös tapauksessa $l = t + 1$.

Jos $k = 0$, niin $x = z^\omega$, missä $z = [1, \theta]$. Muutoin yhtälö (3.2) ilmaisee, että $x = yz^\omega$, missä $y = [1, k]$ ja $z = [k+1, k+\theta]$. Sana x on siis lopulta jaksollinen jaksonpituutenaan $|z| = \theta \leq m = \mathcal{P}(x, n)$. □

Seuraus 3.3. *Jos x on ääretön ja jaksoton sana, niin $\mathcal{P}(x, n) < \mathcal{P}(x, n+1)$ kaikilla $n \geq 1$.* □

Huomautus 3.4. Seurauksen epäyhtälö on tarkka siinä mielessä, että kuten myöhemmin tullaan näkemään, niin Sturmin sanan x kompleksisuusfunktio on $\mathcal{P}(x, n) = n + 1$. Toisin sanoen $\mathcal{P}(x, n+1) = \mathcal{P}(x, n) + 1$.

Muokaten hieman lemman 3.2 argumenttia saadaan seuraava tulos.

Lemma 3.5. *Olkoot x ääretön sana ja $n \geq 1$. Olkoon m sanan x jakautumattomien n-tekijöiden lukumäärä. Jos sanalla x on $(n+m)$-tekijä, jonka kaikki n-tekijät ovat jakautumattomia sanan x tekijöinä, niin sana x on lopulta jaksollinen.*

Todistus. Olkoon $w = a_1 a_2 \cdots a_{n+m}$, missä $a_i \in A$, sanan x sellainen tekijä, jonka kaikki n-tekijät ovat jakautumattomia, kun niitä tarkastellaan sanan x tekijöinä. Merkitään $r_i = [i+1, i+n]_w$, $(i = 0, \ldots, m)$. Koska n-tekijöitä r_i on $m+1$ kappaletta ja jakautumattomia n-tekijöitä vain m kappaletta, niin lokeroperiaatteen mukaan joillain k ja θ, $0 \leq k \leq m, 0 < \theta \leq m$ on voimassa, että

$$r_k = [k+1, k+n]_w = [k+1+\theta, k+n+\theta]_w = r_{k+\theta}.$$

Todistuksen loppuosa menee kuten lemman 3.2 todistuksessa. □

Huomautus 3.6. Huomaa, että symmetrian vuoksi lemmoja 3.2 ja 3.5 vastaavat analogiset tulokset saadaan vasemmalta äärettömille sanoille. Tulokset ovat voimassa myös kaksipuolisesti äärettömille sanoille, tosin sillä erotuksella, että sanoista tulee täysin jaksollisia. Lisäksi jakautumattomien tekijöiden sijasta pitää puhua kaksipuolisesti jakautumattomista tekijöistä, jotka määritellään ilmeisellä tavalla. Todistus menee periaatteessa soveltamalla lemman 3.2 induktiotodistusta sekä oikealle että vasemmalle. Tämä on todistettu täsmällisesti artikkelin [MH38] lauseessa 7.3. □

Lause 3.7. *Olkoon x ääretön sana. Seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) Sana x on lopulta jaksollinen,

(ii) $\mathcal{P}(x,n) = \mathcal{P}(x,n+1)$ jollain $n \geq 1$,

(iii) $\mathcal{P}(x,n) < n+k-1$ jollain $n \geq 1$, missä k on sanassa x esiintyvien aakkosten lukumäärä,

(iv) $\mathcal{P}(x,n)$ on rajoitettu.

Todistus. $(i) \implies (iv)$ Oletetaan, että sana x on lopulta jaksollinen. Tällöin voidaan kirjoittaa $x = uv^\omega$ joillain sanoilla u ja v. Merkitään $p = |uv|$ ja $q = |v|$. Olkoon $n \geq p$. Sanan x tekijät $[1+r, n+r], (r = 0, \ldots, p-1)$ ovat n-tekijöitä, ja niitä on korkeintaan p erilaista. Koska sana x on lopulta jaksollinen, niin $[p+r+kq, p+r+n-1+kq] = [p-q+r, p-q+r+n-1]$ kaikilla $k \geq 0$ ja $0 \leq r < q$. Täten $\mathcal{P}(x,n) \leq p$. $\mathcal{P}(x,n)$ on siis rajoitettu.

$(iv) \implies (iii)$ Oletetaan, että $\mathcal{P}(x,n)$ on rajoitettu. Valitsemalla sopivan suuri luku n saadaan ehto (iii) voimaan.

$(iii) \implies (ii)$ Oletetaan, että m on pienin sellainen luku, että $\mathcal{P}(x,m) < m+k-1$. Tehdään vastaoletus, että (ii) ei ole voimassa, eli että $\mathcal{P}(x,n+1) > \mathcal{P}(x,n)$ kaikilla $n \geq 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x,m) &= \sum_{i=2}^{m} \underbrace{(\mathcal{P}(x,i) - \mathcal{P}(x,i-1))}_{\geq 1} + \mathcal{P}(x,1) \\ &\geq m-1+\mathcal{P}(x,1) = m+k-1,\end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Siis (ii) on voimassa.

$(ii) \implies (i)$ Seuraa lemmasta 3.2. □

4 Sturmin sanat

4.1 Määritelmä ja alkeisominaisuuksia

Määritelmä 4.1. Ääretön sana x on *Sturmin sana*, jos $\mathcal{P}(x, n) = n + 1$ kaikilla $n \geq 0$.

Ei ole tietenkään selvää, että tällaisia sanoja on edes olemassa. Niiden olemassaolo todistetaan aivan tuota pikaa seuraavassa aliluvussa.

Sturmin sana x on aina binäärisana, sillä siinä on $\mathcal{P}(x, 1) = 2$ aakkosta. Tästä eteenpäin käsitellään melkeinpä jatkuvasti binäärisanoja, joten jatkossa tutkielman loppuun asti oletetaan, että kaikki sanat ovat binäärisanoja yli aakkoston $\{0, 1\}$.

Edellä on eräs tapa määritellä Sturmin sanat. Myöhemmin tullaan näkemään, että Sturmin sanoille on useita vaihtoehtoisia määritelmiä eli luonnehdintoja. Jatkossa määritelmänä käytetään aina yllä olevaa luonnehdintaa. Määritelmän pohjalta on ilmeistä, että sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos *sen tietynpituisten tekijöiden joukossa on täsmälleen yksi jakautuva tekijä.*

Binäärisanojen yhteydessä on kätevää määritellä *vaihto-operaatio* $\hat{}$, joka vaihtaa aakkosen aakkoston toiseksi aakkoseksi: $\hat{0} = 1$ ja $\hat{1} = 0$. Operaatio laajenee luontevasti morfismiksi: $\widehat{uv} = \hat{u}\hat{v}$.

Lauseen 3.7 valossa Sturmin sanat ovat aivan jaksollisuuden ja jaksottomuuden rajalla. Mikäli Sturmin sanan tekijäjoukko olisi vähänkin yksinkertaisempi, niin olisi sana jaksollinen. Kun kirjallisuudessa puhutaan – hieman intuitiivisesti – että Sturmin sanoilla on minimaalinen kompleksisuus, tarkoitetaan juuri tätä. On siis osoitettu seuraava tulos.

Seuraus 4.2. *Sturmin sanat ovat jaksottomia.* □

Ääretöntä sanaa kutsutaan *toistavaksi*, jos sen jokainen tekijä esiintyy siinä äärettömän monesti.

Lemma 4.3. *Sturmin sanat ovat toistavia.*

Todistus. Olkoon x Sturmin sana. Merkitään $x = a_1 a_2 \cdots$, missä $a_i \in \{0, 1\}$. Tehdään vastaoletus, että n-tekijä w esiintyisi sanassa x vain äärellisen monta kertaa. Täten on olemassa sellainen luku $i > 1$, että sanalla $y = a_i a_{i+1} \cdots$ ei ole tekijänä sanaa w. Näin ollen $\mathcal{P}(y, n) \leq n$, jolloin lauseen 3.7 mukaan

y on lopulta jaksollinen. Siis myös sana x on lopulta jaksollinen, mikä on ristiriita. □

Seuraus 4.4. *Sturmin sanan suffiksit ovat Sturmin sanoja.*

Todistus. Olkoon x Sturmin sana ja sana y sen suffiksi. Lemman 4.3 mukaan sana x on toistava, joten sen kaikki tekijät esiintyvät myös sanassa y. Täten myös $\mathcal{P}(y,n) = n+1$ kaikilla $n \geq 0$. Sana y on siis Sturmin sana. □

Esimerkki 4.5. Esimerkissä 2.4 esitelty Thuen–Morsen sana t ei ole Sturmin sana. Nimittäin sanan t muodosta nähdään, että $\mathcal{F}_2(t) = \{00, 01, 10, 11\}$, joten $\mathcal{P}(t,2) = 4 \neq 3$.

4.2 Fibonaccin sana

Ei ole välittömästi selvää, että Sturmin sanoja on edes olemassa. Määritellään nk. Fibonaccin sana, joka osoittautuu Sturmin sanaksi.

Määritellään morfismi φ seuraavasti:

$$\varphi : \begin{array}{l} 0 \mapsto 01, \\ 1 \mapsto 0. \end{array}$$

Fibonaccin sana f saadaan toistamalla morfismia φ: $f = \varphi^\omega(0)$ (ks. lemma 2.3). Sen alku menee seuraavasti

$$f = 0100101001001010010100100101001001\cdots$$

Fibonaccin sana on siis raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n$, missä $f_n = \varphi^n(0)$. Sanajonon (f_n) sanat voidaan ilmaista myös seuraavasti:

$$f_{-1} = 1, \qquad f_0 = 0, \qquad f_{n+2} = f_{n+1}f_n. \tag{4.1}$$

Kaava seuraa induktiolla laskelmasta $f_{n+2} = \varphi(f_{n+1}) = \varphi(f_n f_{n-1}) = f_{n+1}f_n$.

Todistetaan seuraavaksi, että Fibonaccin sana on Sturmin sana. Todistus on suoraviivainen, mutta pitkähkö. Todistetaan ensin avuksi kaksi lemmaa.

Lemma 4.6. *Olkoon u mikä tahansa sana. Morfismi φ toteuttaa relaation*

$$\varphi(\widetilde{u})0 = 0\widetilde{\varphi}(u). \tag{4.2}$$

Todistus. Laskemalla nähdään, että relaatio on voimassa, kun $u = 0, 1$. Todistetaan väite induktiolla sanan u pituuden suhteen. Oletetaan, että relaatio on voimassa sanalle u. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}\varphi((0u)^{\sim})0 &= \varphi(\widetilde{u})\varphi(0)0 = \varphi(\widetilde{u})010 = 0\widetilde{\varphi}(u)10 \\ &= 0(01\varphi(u))^{\sim} = 0(\varphi(0)\varphi(u))^{\sim} = 0\widetilde{\varphi}(0u),\end{aligned}$$

missä kolmas yhtäsuuruus seuraa induktiohypoteesista. Tarkastelu menee vastaavasti sanalle $1u$. □

Määritellään sanajonot (g_n) ja (t_n) seuraavasti:

$$g_n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{jos } n = 2, \\ f_{n-3} \cdots f_1 f_0, & \text{jos } n \geq 3, \end{cases} \qquad t_n = \begin{cases} 01, & \text{jos } n \text{ on pariton}, \\ 10, & \text{jos } n \text{ on parillinen}. \end{cases}$$

Tarkastellaan sanaa $\varphi(t_n)$, kun n on pariton. Saadaan, että $\varphi(t_n) = \varphi(01) = 010 = 0t_{n+1}$. Vastaavasti käy myös, kun n on parillinen. Käyttäen tätä tietoa, että $\varphi(t_n) = 0t_{n+1}$, ja relaatiota (4.2) saadaan, että kaikilla $n \geq 0$ on voimassa

$$\varphi(\widetilde{f}_n t_n) = \varphi(\widetilde{f}_n)\varphi(t_n) = \varphi(\widetilde{f}_n)0t_{n+1} \overset{(4.2)}{=} 0\widetilde{\varphi}(f_n)t_{n+1} = 0\widetilde{f}_{n+1}t_{n+1}. \tag{4.3}$$

Laskemalla nähdään, että kun $n \geq 3$, niin

$$\varphi(g_n)0 = \varphi(f_{n-3} \cdots f_1 f_0)0 = f_{n-2} \cdots f_2 f_1 0 = g_{n+1}. \tag{4.4}$$

Tapauksessa $n = 2$ saadaan sama tulos suoralla laskulla.

Lemma 4.7. *Sanajonon (f_n) sanat toteuttavat relaation*

$$f_{n+2} = g_n \widetilde{f}_n \, \widetilde{f}_n t_n, \tag{4.5}$$

kun $n \geq 2$.

Todistus. Todistetaan väite käyttäen induktiota luvun n suhteen. Relaatio on selvästi voimassa, kun $n = 2, 3$, sillä $f_4 = \varepsilon(010)(010)10$ ja $f_5 = 0(10010)(10010)01$. Nyt

$$\begin{aligned}f_{n+2} &= \varphi(f_{n+1}) = \varphi(g_{n-1}\widetilde{f}_{n-1}\widetilde{f}_{n-1}t_{n-1}) \overset{(4.3)}{=} \varphi(g_{n-1})\varphi(\widetilde{f}_{n-1})0\widetilde{f}_n t_n \\ &\overset{(4.2)}{=} \varphi(g_{n-1})0\widetilde{\varphi}(f_{n-1})\,\widetilde{f}_n t_n = \varphi(g_{n-1})0\widetilde{f}_n\widetilde{f}_n t_n \overset{(4.4)}{=} g_n\widetilde{f}_n\widetilde{f}_n t_n.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.8. *Fibonaccin sana on Sturmin sana.*

Todistus. Morfismin φ määrittelystä nähdään, että sana f on sanojen 0 ja 01 tulo, eikä näiden sanojen tulona voida selvästikään muodostaa sanaa 11. Kirjoittamalla auki sanan f esitystä nähdään, että sillä on tekijöinä sanat 00 ja 10. Täten $\mathcal{P}(f, 2) = 3$. Sana 000 ei myöskään ole Fibonaccin sanan tekijä, sillä muutoin olisi voimassa $000 \leq \varphi(x)$ jollakin $x \in \mathcal{F}(f)$, jolloin morfismin φ määrittelyn nojalla on oltava, että $11 \leq x$, mikä on mahdotonta.

Kuten on aiemmin mainittu, riittää osoittaa, että sanalla f on tietynpituisten tekijöidensä joukossa täsmälleen yksi tekijä, joka on jakautuva.

Väite: Kun x on mikä tahansa sana, niin jompikumpi sanoista $0x0$ ja $1x1$ ei ole sanan f tekijä.

Todistus. Väite pitää edeltävän nojalla paikkansa, kun $x = \varepsilon$ tai kun $x = 0, 1$. Oletetaan sitten, että x on lyhin sellainen sana, että väite ei ole voimassa, eli että $0x0, 1x1 \in \mathcal{F}(f)$. Koska $11 \notin \mathcal{F}(f)$, niin $x = 0y0$ jollain sanalla y. Siis $00y00, 10y01 \in \mathcal{F}(f)$. Koska sana f on sanojen 0 ja 01 tulo, niin edellisestä nähdään, että on oltava olemassa sellainen sana $z \in \mathcal{F}(f)$, että $\varphi(z) = 0y$. Laskemalla saadaan, että sanat $\varphi(1z1) = 00y0$ ja $\varphi(0z0) = 010y01$ ovat sana f tekijöitä, joten $0z0, 1z1 \in \mathcal{F}(f)$. Tämä on ristiriidassa sanan x minimaalisuuden kanssa, sillä $|z| \leq |\varphi(z)| = |0y| < |x|$. $\square$

Oletetaan sitten, että samanpituiset ja erisuuret sanan f tekijät u ja v ovat molemmat jakautuvia. Olkoon w sanojen u ja v pisin yhteinen suffiksi. Tällöin $0w0, 0w1, 1w0, 1w1 \in \mathcal{F}(f)$, mikä on ristiriidassa edeltävän väitteen kanssa. Sanalla f on siis korkeintaan yksi tietynpituinen jakautuva tekijä.

Näytetään sitten, että sanalla f on ainakin yksi tietynpituinen jakautuva tekijä.

Kun luku n on pariton, niin sanan f_n viimeinen aakkonen on 1. Kun luku n on parillinen, niin viimeinen aakkonen on 0. Tämä johtuu morfismin φ määrittelystä ja siitä, että $f_1 = 01$. Näin ollen sanan $\widetilde{f_n}$ ensimmäinen aakkonen on eri kuin sanan t_n. Relaatioon (4.5) sovellettuna tämä osoittaa, että sana $\widetilde{f_n}$ on jakautuva, kun $n \geq 2$ (ensimmäinen sana $\widetilde{f_n}$ laajenee eri tavalla kuin jälkimmäinen). Koska jakautuvan sanan suffiksitkin ovat jakautuvia, niin sanassa f on minkä tahansa pituisia jakautuvia tekijöitä. $\square$

4.3 Tasapainotetut sanat

Tässä aliluvussa tutkitaan ns. tasapainotettujen sanojen perusominaisuuksia seuraavassa aliluvussa esiteltävää Sturmin sanojen luonnehdintaa varten. Tulokset perustuvat artikkeliin [CH73].

Sanan x *korkeus* $h(x)$ kertoo montako aakkosta 1 siinä esiintyy. Toisin sanoen $h(x) = |x|_1$. Muissa yhteyksissä korkeutta nimitetään usein painoksi, mutta myöhemmin mekaanisten sanojen yhteydessä tällä luvulla on selvä tulkinta korkeutena.

Määritelmä 4.9. Olkoot x ja y samanpituisia sanoja. Lukua

$$\delta(x, y) = |h(x) - h(y)|.$$

kutsutaan sanojen x ja y *etäisyydeksi.*

Määritelmä 4.10. Sanajoukko X on *tasapainotettu*, jos kaikille samanpituisille sanoille $x, y \in X$ on voimassa ehto

$$\delta(x, y) \leq 1.$$

Sana (ehkä ääretön) on tasapainotettu, mikäli sen tekijäjoukko on tasapainotettu.

Huomaa, että jos $||x|_1 - |y|_1| \leq 1$, niin myös $||x|_0 - |y|_0| \leq 1$. Joukko sanoja on *tekijäsuljettu*, jos se sisältää kaikkien sanojensa kaikki tekijät. Huomaa, että olipa x äärellinen tai ääretön sana, niin joukko $\mathcal{F}(x)$ on tekijäsuljettu.

Lemma 4.11. *Olkoon X tekijäsuljettu joukko sanoja. Jos X on tasapainotettu, niin $|X \cap \{0, 1\}^n| \leq n + 1$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Väite on selvä tapauksissa $n = 0, 1$. Tapaus $n = 2$ on myös selvä: X ei voi sisältää sanoja 00 ja 11 samanaikaisesti, sillä $\delta(00, 11) = 2$.

Tehdään vastaoletus, että $n \geq 3$ on pienin sellainen luku, jolla väite ei ole voimassa. Merkitään $Y = X \cap \{0, 1\}^{n-1}$ ja $Z = X \cap \{0, 1\}^n$. Nyt $|Y| \leq n$ luvun n minimaalisuuden nojalla, ja $|Z| \geq n + 2$.

Koska X on tekijäsuljettu, niin jokaisen sanan $z \in Z$ $(n - 1)$-suffiksi kuuluu joukkoon Y. Voidaan siis määritellä kuvaus $\alpha : Z \to Y$, joka kuvaa sanan z itsensä $(n - 1)$-suffiksiksi. Jos α on injektio, niin $|Y| \geq |Z| \geq n + 2$, mikä on mahdotonta. Siis joillakin $z, z' \in Z$, $\alpha(z) = \alpha(z')$. Jos vain kahdella sanalla on sama kuva, niin $|Y| \geq |Z| - 1 \geq n + 1$, mikä on vieläkin ristiriita. Toisaalta korkeintaan kahdella sanalla joukossa Z on sama kuva, sillä aakkosto koostuu vain kahdesta symbolista. Näin ollen on olemassa sellaiset sanat $y, y' \in Y, y \neq y'$, että kaikki neljä sanaa $0y, 1y, 0y', 1y' \in Z$.

Edelleen koska X on tekijäsuljettu ja $y \neq y'$, niin on olemassa sellaiset sanat $x, u, v \in X$ ja aakkonen c, että $y = xcu$ ja $y' = x\hat{c}v$ (x on sanojen y ja y' pisin yhteinen prefiksi, sana x on mahdollisesti tyhjä). Oletetaan, että $c = 0$, tapaus $c = 1$ on symmetrinen. Nyt $0y = 0x0u$ ja $y' = 1x1v$ eli joukko X sisältää sanat $0x0$ ja $1x1$. Joukko X ei olekaan tasapainotettu. Tämä on ristiriita. $\square$

Lemma 4.12. *Olkoon X tekijäsuljettu joukko sanoja. Joukko X ei ole tasapainotettu, jos ja vain jos on olemassa sellainen yksikäsitteinen palindromi w (kenties tyhjä sana), että $0w0, 1w1 \in X$.*

Todistus. Jos väitetynlainen palindromi w on olemassa, niin joukko X ei selvästikään ole tasapainotettu.

Oletetaan sitten, että joukko X ei ole tasapainotettu. Olkoot $u, v \in X$ lyhimmät sellaiset samanpituiset sanat, että $\delta(u, v) \geq 2$. Merkitään $n = |u| = |v|$. Selvästi on oltava, että $n \geq 2$. Kirjoitetaan $u = ax$ ja $v = by$, missä a ja b ovat aakkosia. Tällöin $a \neq b$. Nimittäin jos $a = b$, niin $\delta(x, y) \geq 2$, mikä on ristiriidassa luvun n minimaalisuuden kanssa. Samoin osoitetaan, että sanojen u ja v viimeiset aakkoset eivät ole samat. Rajoituksetta voidaan olettaa, että $a = 0$ ja $b = 1$. Nyt voidaan kirjoittaa $u = 0wcu'$ ja $v = 1w\hat{c}v'$ joillakin sanoilla w, u', v' ja aakkosella c. Jos $c = 1$, niin $\delta(u', v') = \delta(u, v)$, mikä luvun n minimaalisuuden vuoksi on mahdotonta. Siispä $c = 0$. Jälleen minimaalisuuden nojalla on oltava, että $u' = v' = \varepsilon$ eli $u = 0w0$ ja $v = 1w1$.

Oletetaan sitten, että sana w ei ole palindromi. Tällöin sanalla w on prefiksinä sellainen sana za, missä a on aakkonen, että sana $\hat{a}\widetilde{z}$ on sanan w suffiksi. Näin ollen saadaan sanalle u aito prefiksi $0za$ ja sanalle v aito suffiksi $\hat{a}\widetilde{z}1$. Jos $a = 0$, niin $\delta(0za, \hat{a}\widetilde{z}1) = \delta(0z0, 1z1) = 2$, mikä on jälleen ristiriita. Siispä $a = 1$. Tällöin kuitenkin $u = 0z1u''$ ja $v = v''1\widetilde{z}0$, jolloin $\delta(u'', v'') = \delta(u, v)$, mikä on vielä kerran ristiriitaista. Sana w on siis palindromi.

Oletetaan sitten, että on olemassa sellainen palindromi s, $s \neq w$, $|s| = |w|$, että $0s0, 1s1 \in X$. Kirjoitetaan $w = taw'$ ja $s = tbs'$, joillain sanoilla

w', s' ja aakkosille a ja b, $a \neq b$. Jos $a = 1$ ja $b = 0$, niin $0t0, 1t1 \in X$. Tämä on ristiriita, sillä $|t| < |w|$. Täten palindromi w on yksikäsitteinen. $\square$

4.4 Luonnehdinta Sturmin sanoille tasapainoisuuden avulla

Tässä aliluvussa annetaan toinen luonnehdinta Sturmin sanoille. Tämä luonnehdinta on nähtävissä artikkelien [MH40] ja [CH73] tuloksista. Tässä esitettävät perustelut mukailevat kirjaa [Lot02].

Seuraava luonnehdinta on erittäin tärkeä, ja jatkossa oletetaan, että tämä tulos on tunnettu vaikkei seuraavaan lauseeseen suoraan viitatakaan.

Lause 4.13. *Olkoon x ääretön sana. Tällöin sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos sana x on tasapainotettu ja jaksoton.*

Todistus. ($\Longleftarrow$) Oletetaan, että sana x on tasapainotettu ja jaksoton. Lauseen 3.7 kohdan (*iii*) mukaan $\mathcal{P}(x, n) \geq n + 1$. Toisaalta lemman 4.11 mukaan $\mathcal{P}(x, n) \leq n + 1$. Siis $\mathcal{P}(x, n) = n + 1$ eli sana x on Sturmin sana.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että sana x on Sturmin sana. Koska Sturmin sanat ovat jaksottomia, riittää osoittaa, että sana x on tasapainotettu. Tehdään vastaoletus, että sana x ei ole tasapainotettu. Lemman 4.12 mukaan on olemassa sellainen palindromi w, että sanat $0w0, 1w1 \in \mathcal{F}(x)$. Tämä tarkoittaa, että tekijä w on jakautuva. Merkitään $n = |w| + 1$. Koska sana x on Sturmin sana, niin sanalla x on yksikäsitteinen jakautuva n-tekijä, jonka on oltava joko sana $0w$ tai $1w$. Oletetaan, että tekijä $0w$ on jakautuva. Toinen tapaus, jossa sana $1w$ on jakautuva todistetaan samoin. Koska tekijä $0w$ on jakautuva, niin sana $1w$ ei ole. Täten $0w1 \in \mathcal{F}(x)$ ja $1w0 \notin \mathcal{F}(x)$. Siis kaikkia sanan $1w$ esiintymiä seuraa aakkonen 1. Olkoon v sellainen sana, jonka pituus on $n - 1$, ja $u = 1w1v \in \mathcal{F}(x)$. Huomaa, että $|u| = 2n$.

Väite: Sanan u n-tekijät ovat jakautumattomia (sanan x tekijöinä).

Todistus. Koska sanalla x on täsmälleen yksi jakautuva n-tekijä $0w$, niin riittää osoittaa, että $0w$ ei ole sanan u tekijä. Jos $w = \varepsilon$, niin myös $v = \varepsilon$, jolloin on selvää, ettei $0w = 0$ ole sanan $u = 11$ tekijä. Oletetaan sitten, että $w \neq \varepsilon$. Tehdään vastaoletus, että sana $0w$ on sanan u tekijä. Koska $|0w| = |1v| = n$, niin välttämättä sanat $w1v$ ja $0w$ ovat sanan u tekijöinä päälekkäiset. Voidaan siis kirjoittaa, että $w = s0t, v = yz$ ja $w = t1y$ joillain sanoilla t, y ja z. Tilannetta selkeyttää seuraava kuva:

<table>
<tr><td colspan="7">u</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">w</td><td>1</td><td colspan="2">v</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>0</td><td colspan="3">w</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>s</td><td>0</td><td>t</td><td>1</td><td>y</td><td>z</td></tr>
</table>

Koska sana w on palindromi, niin $w = \widetilde{w} = \widetilde{t}0\widetilde{s}$. Siis $w = \widetilde{t}0\widetilde{s} = t1y$. Täten $t = \widetilde{t}$, ja sanalla w on kaksi erisuurta samanpituista prefiksiä $t0$ ja $t1$, mikä on ristiriita. $\square$

Lemman 3.5 mukaan edeltävästä väitteestä seuraa, että sana x on lopulta jaksollinen, mikä on ristiriita. $\square$

Todistetaan vielä lemman 4.11 sovelluksena seuraava lause.

Lause 4.14. *Sturmin sanan x tekijäjoukko $\mathcal{F}(x)$ on peilauksen suhteen suljettu.*

Todistus. Merkitään $\widetilde{\mathcal{F}}(x) = \{\widetilde{w} : w \in \mathcal{F}(x)\}$. Joukko $X = \mathcal{F}(x) \cup \widetilde{\mathcal{F}}(x)$ on tasapainotettu, koska joukko $\mathcal{F}(x)$ on tasapainotettu. Lisäksi se on selvästi tekijäsuljettu. Lemman 4.11 mukaan $|X \cap A^n| \leq n + 1$ kaikille $n \geq 0$. Koska $|\mathcal{F}(x) \cap A^n| = n + 1$, niin $X = \mathcal{F}(x)$. Siispä $\widetilde{\mathcal{F}}(x) = \mathcal{F}(x)$. $\square$

Huomautus 4.15. Näytetään, että lauseen 4.13 tulos ei ole yleisesti voimassa kaksipuolisesti äärettömille sanoille. Olkoon $x = \cdots a_{-1}a_0a_1a_2\cdots$ kaksipuolisesti ääretön sana, jolle $a_i = 1$ kun $i \leq 0$ ja $a_i = 0$, kun $i \geq 1$. On helppoa nähdä, että $\mathcal{F}_n(x) = \{1^k0^{n-k} : k = 0, 1, \ldots, n\}$. Siispä $\mathcal{P}(x, n) = n + 1$. Kuitenkin esimerkiksi $00, 11 \in \mathcal{F}(x)$, joten sana x ei ole tasapainotettu.

Lisätietoja kaksipuolisesti äärettömistä sanoista x, joille $\mathcal{P}(x, n) = n+1$, on artikkelissa [CH73].

5 Mekaaniset sanat

Tässä luvussa näytetään miten Sturmin sanoja voidaan luonnehtia ns. mekaanisina sanoina. Mekaaninen sana on tasosuoran diskretisointi, kuten aliluvussa 5.2 nähdään. Tarkastelut mukailevat kirjaa [Lot02]. Luonnehdintaa varten tutkitaan ensimmäiseksi sanan kaltevuuden käsitettä.

5.1 Sanan kaltevuus

Määritelmä 5.1. Olkoon x epätyhjä sana. Lukua $\pi(x) = h(x)/|x|$ kutsutaan sanan x *kaltevuudeksi.*

Seuraava kaava on usein tarpeellinen.

$$\pi(xy) = \frac{1}{|xy|}h(xy) = \frac{1}{|xy|}(h(x) + h(y)) = \frac{|x|}{|xy|}\pi(x) + \frac{|y|}{|xy|}\pi(y).$$

Lause 5.2. *Olkoon X tekijäsuljettu joukko sanoja. Sanajoukko X on tasapainotettu, jos ja vain jos*

$$||h(x)|y| - h(y)|x|| \leq |x| + |y| - syt(|x|, |y|) \tag{5.1}$$

kaikilla $x, y \in X$.

Todistus. ($\Longleftarrow$) Oletetaan, että epäyhtälö (5.1) on voimassa. Olkoot $x, y \in X$ samanpituiset sanat. Tapaus $x = y = \varepsilon$ on selvä. Oletetaan, että sanat x ja y ovat epätyhjiä, ja merkitään $l = |x| = |y|$. Oletuksen mukaan

$$|h(x)l - h(y)l| \leq l + l - syt(l, l) = l,$$

mikä on ekvivalenttia sen kanssa, että $|h(x) - h(y)| \leq 1$. Joukko X on siis tasapainotettu.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että joukko X on tasapainotettu. Osoitetaan väite induktiolla luvun $|x|+|y|$ suhteen. Väite on selvästi voimassa, kun $|x|+|y| \leq 2$. Oletetaan sitten, että väite on voimassa kaikilla $u, v \in X$, kun $|u| + |v| \leq k$. Olkoot $x, y \in X$ sellaiset sanat, että $|x|+|y| = k+1$. Jos $|x| = |y|$, niin epäyhtälö (5.1) on voimassa, sillä joukko X on tasapainotettu. Oletetaan sitten, että $|x| > |y|$, ja merkitään $x = zt$, missä $|z| = |y|$. Tällöin $h(x) = h(z)+h(t)$ ja $|x| = |z| + |t|$. Nyt

$$
\begin{aligned}
||h(x)|y| - h(y)|x|| &= |(h(z)|y| - h(y)|z|) + (h(t)|y| - h(y)|t|)| \\
&= |(h(z) - h(y))|z| + (h(t)|y| - h(y)|t|)| \\
&\leq |(h(z) - h(y))|z|| + |h(t)|y| - h(y)|t|| \\
&\leq |z| + |h(t)|y| - h(y)|t|| \\
&\leq |z| + |y| + |t| - syt(|y|, |t|) \\
&= |z| + |y| + |t| - syt(|y|, |y| + |t|) \\
&= |x| + |y| - syt(|y|, |x|),
\end{aligned}
$$

missä ensimmäinen arvio tulee kolmioepäyhtälöstä, toinen siitä että joukko X on tasapainotettu ja $|y| = |z|$ ja kolmas arvio induktio-oletuksesta. Epäyhtälö (5.1) on siis voimassa. □

Seuraus 5.3. *Olkoon X tekijäsuljettu joukko sanoja. Sanajoukko X on tasapainotettu, jos ja vain jos*

$$
|\pi(x) - \pi(y)| < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \tag{5.2}
$$

kaikilla $x, y \in X \setminus \{\varepsilon\}$.

Todistus. ($\Longleftarrow$) Oletetaan, että epäyhtälö (5.2) on voimassa. Olkoot $x, y \in X \setminus \{\varepsilon\}$ samanpituiset sanat. Tällöin oletuksen nojalla

$$
|\pi(x) - \pi(y)| = \left| \frac{h(x)}{|x|} - \frac{h(y)}{|x|} \right| < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|},
$$

mikä on ekvivalenttia sen kanssa, että $|h(x) - h(y)| < 2$. Joukko X on siis tasapainotettu.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että joukko X on tasapainotettu. Olkoot $x, y \in X \setminus \{\varepsilon\}$. Jakamalla epäyhtälö (5.1) puolittain luvulla $|x||y|$ saadaan epäyhtälö

$$
|\pi(x) - \pi(y)| \leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} - \frac{syt(|x|, |y|)}{|x||y|},
$$

josta epäyhtälö (5.2) seuraa. □

Seuraus 5.4. *Olkoon x ääretön ja tasapainotettu sana. Olkoon x_n sanan x n-prefiksi. Tällöin lukujono $(\pi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ suppenee.*

Todistus. Epäyhtälö (5.2) osoittaa, että jono $(\pi(x_n))$ on Cauchyn jono, täten jono suppenee. $\square$

Käytetään edeltävän seurauksen merkintöjä. Seurauksen nojalla on mielekästä puhua sanan x kaltevuudesta.

Määritelmä 5.5. Sanan x *kaltevuus* on raja-arvo

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \pi(x_n).$$

Esimerkki 5.6. Lasketaan Fibonaccin sanan kaltevuus. Olkoon $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ Fibonaccin lukujono: $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ Ensinnäkin kaavoista (4.1) nähdään induktion avulla, että $|f_n| = F_{n+2}$. Toiseksi induktion, kaavan $h(xy) = h(x) + h(y)$ ja kaavojen (4.1) avulla saadaan, että $h(f_n) = F_n$. Lisäksi muistetaan tunnettu kaava:

$$F_n = \frac{\tau^n - \bar{\tau}^n}{\tau - \bar{\tau}},$$

missä $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ ja $\bar{\tau} = (1 - \sqrt{5})/2$. Tämä kaava seuraa mm. teoksen [And89] lauseesta 4.1. Täten

$$\pi(f_n) = \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{\tau^n - \bar{\tau}^n}{\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}} = \frac{1 - \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^n}{\tau^2\left(1 - \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{n+2}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\tau^2}.$$

Fibonaccin sanan kaltevuus on siis $1/\tau^2$.

Seuraava lemma kertoo, että raja-arvon laskemiseksi voidaan n-prefiksien x_n sijaan käyttää mitä tahansa muitakin tekijöitä.

Lemma 5.7. *Olkoon x ääretön tasapainotettu sana, jonka kaltevuus on α. Tällöin jokaiselle sanan x epätyhjälle tekijälle u on voimassa*

$$|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|}. \tag{5.3}$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tarkastellaan sanan x n-prefiksiä x_n. Tällöin on olemassa sellainen luku n_0, että kun $n \geq n_0$, niin

$$|\pi(x_n) - \alpha| < \varepsilon.$$

Käyttäen epäyhtälöä (5.2) saadaan

$$\begin{aligned}|\pi(u) - \alpha| &= |\pi(u) - \pi(x_n) + \pi(x_n) - \alpha| \leq |\pi(u) - \pi(x_n)| + |\pi(x_n) - \alpha| \\ &< \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|x_n|} + \varepsilon = \frac{1}{|u|} + \frac{1}{n} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Kun $n \to \infty$, niin $\varepsilon \to 0$, jolloin väitetty epäyhtälö seuraa. $\square$

Seuraus 5.8. *Olkoot merkinnät kuten edeltävässä lemmassa. Tällöin on voimassa joko*

$$\alpha|u| - 1 < h(u) \le \alpha|u| + 1 \quad \textit{kaikilla } u \in \mathcal{F}(x) \textit{ tai} \tag{5.4}$$

$$\alpha|u| - 1 \le h(u) < \alpha|u| + 1 \quad \textit{kaikilla } u \in \mathcal{F}(x). \tag{5.5}$$

Todistus. Huomaa, että väite on voimassa, jos $u = \varepsilon$. Oletetaan, että sana u on epätyhjä. Muokkaamalla epäyhtälöä (5.3) saadaan, että

$$\alpha|u| - 1 \le h(u) \le \alpha|u| + 1.$$

Jos jompikumpi epäyhtälöistä (5.4) tai (5.5) ei pitäisi paikkaansa, niin olisi olemassa sellaiset sanan x tekijät u ja v, että $\alpha|u| - 1 = h(u)$ ja $\alpha|v| + 1 = h(v)$. Tällöin $|\pi(u) - \pi(v)| = 1/|u| + 1/|v|$, mikä on ristiriita epäyhtälön (5.2) kanssa. □

Lause 5.9. *Olkoon x ääretön tasapainotettu sana. Sanan x kaltevuus α on rationaaliluku, jos ja vain jos sana x on lopulta jaksollinen.*

Todistus. ($\Longleftarrow$) Oletetaan, että $x = uy^\omega$ joillain sanoilla u ja y. Nyt kaikilla $n \ge 0$ on voimassa, että

$$\pi(uy^n) = \frac{h(u) + nh(y)}{|u| + n|y|}.$$

Täten $\pi(uy^n) \to \pi(y)$, kun $n \to \infty$. Sanan x kaltevuus on siis $\pi(y)$, joka on rationaaliluku.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että kaltevuus α on rationaaliluku p/q, missä kokonaisluvut p ja q ovat suhteellisia alkulukuja. Oletetaan sitten, että yhtälöistä (5.4) ja (5.5) on voimassa (5.4). Toinen tapaus todistetaan symmetrisesti. Yhtälön (5.4) nojalla sanan x minkä tahansa q-tekijän korkeus on p tai $p + 1$. Sanan x sellaiset q-tekijät, joiden korkeus on $p + 1$, esiintyvät sanassa x vain äärellisen monta kertaa. Nimittäin jos näin ei olisi, niin valitsemalla riittävän pitkä tekijä z, saadaan sanalle x tekijä uzv, missä $|u| = |v| = q$ ja $|h(u)| = |h(v)| = p + 1$. Tällöin käyttäen epäyhtälöä (5.4) saadaan, että

$$2 + 2p + h(z) = h(uzv) \le 1 + \alpha q + \alpha|z| + \alpha q = 1 + 2p + \alpha|z|,$$

joten $h(z) \le \alpha|z| - 1$, mikä on ristiriita epäyhtälön (5.4) kanssa. Koska q-tekijöitä, joiden korkeus on $p + 1$, esiintyy sanassa x vain äärellisen monta kertaa, niin voidaan kirjoittaa, että $x = ty$, missä y on sellainen ääretön sana, jonka kaikkien q-tekijöiden korkeus on p. Tarkastellaan sitten sanan y $(q+1)$-tekijää awb, missä a ja b ovat aakkosia. Koska $h(aw) = h(wb) = p$, niin on oltava, että $a = b$. Tämä tarkoittaa, että sana y on jaksollinen, ja että sen jaksonpituus on q. Täten sana x on lopulta jaksollinen. □

5.2 Mekaaniset sanat

Todistetaan ensin muutamia perusasioita lattia- ja kattofunktiosta.

Lemma 5.10. *Olkoot α ja β reaalilukuja. Tällöin $\lfloor\alpha\rfloor \leq \lfloor\alpha+\beta\rfloor - \lfloor\beta\rfloor \leq \lfloor\alpha\rfloor + 1$ ja $\lceil\alpha\rceil - 1 \leq \lceil\alpha+\beta\rceil - \lceil\beta\rceil \leq \lceil\alpha\rceil$.*

Todistus. Jos $\beta \in \mathbb{Z}$, niin väite on selvä. Oletetaan sitten, että luku β ei ole kokonaisluku, jolloin $\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \varepsilon$ ja $\beta = \lfloor\beta\rfloor + \varepsilon'$, missä $0 \leq \varepsilon < 1$ ja $0 < \varepsilon' < 1$. Oletetaan ensin, että $\varepsilon + \varepsilon' < 1$. Tällöin $\lfloor\alpha+\beta\rfloor = \lfloor\lfloor\alpha\rfloor + \varepsilon + \lfloor\beta\rfloor + \varepsilon'\rfloor = \lfloor\alpha\rfloor + \lfloor\beta\rfloor$ ja $\lceil\alpha+\beta\rceil = \lfloor\alpha\rfloor + \lfloor\beta\rfloor + 1$, joka on tapauksessa $\varepsilon = 0$ yhtäsuuri kuin $\lceil\alpha\rceil + \lceil\beta\rceil$ ja muutoin yhtäsuuri kuin $\lceil\alpha\rceil + \lceil\beta\rceil - 1$. Jos taas $\varepsilon + \varepsilon' \geq 1$, niin $\lfloor\alpha+\beta\rfloor = \lfloor\alpha\rfloor + \lfloor\beta\rfloor + 1$ ja $\lceil\alpha+\beta\rceil = \lceil\alpha\rceil + \lceil\beta\rceil$. Vähentämällä saaduista yhtälöistä puolittain vastaavasti $\lfloor\beta\rfloor$ ja $\lceil\beta\rceil$ väite seuraa. □

Lemma 5.11. *Olkoot α ja β reaalilukuja. Tällöin*

$$\begin{aligned} \alpha - \beta - 1 &< \lfloor\alpha\rfloor - \lfloor\beta\rfloor < \alpha - \beta + 1 \text{ ja} \\ \alpha - \beta - 1 &< \lceil\alpha\rceil - \lceil\beta\rceil < \alpha - \beta + 1. \end{aligned} \tag{5.6}$$

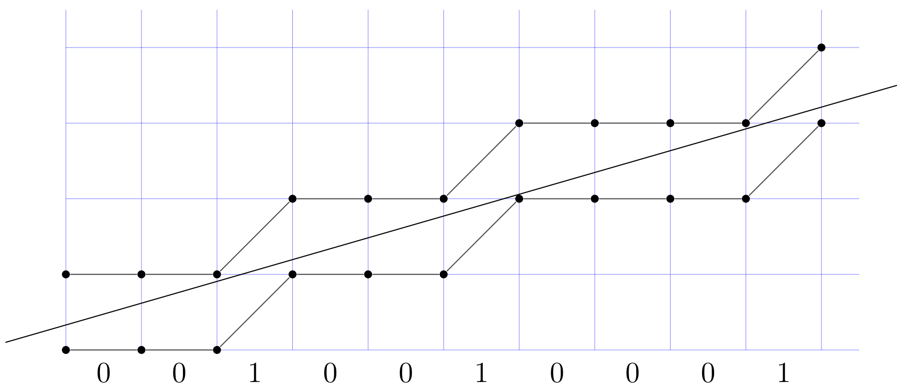
Todistus. Kirjoitetaan $\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \varepsilon$ ja $\beta = \lfloor\beta\rfloor + \varepsilon'$, missä $0 \leq \varepsilon, \varepsilon' < 1$. Koska $-1 < \varepsilon - \varepsilon' < 1$, niin $\lfloor\alpha\rfloor - \lfloor\beta\rfloor < \lfloor\alpha\rfloor - \lfloor\beta\rfloor + \varepsilon - \varepsilon' + 1 = \alpha - \beta + 1$ ja $\lfloor\alpha\rfloor - \lfloor\beta\rfloor > \lfloor\alpha\rfloor - \lfloor\beta\rfloor - 1 + \varepsilon - \varepsilon' = \alpha - \beta - 1$. Samat arviot kelpaavat myös kattofunktion tapauksessa. □

Olkoot annettuna kaksi reaalilukua α ja ρ, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \rho < 1$. Jatkossa mekaanisten sanojen yhteydessä lukujen α ja ρ oletetaan toteuttavan nämä ehdot ellei toisin mainita. Määritellään *alempi mekaaninen sana* $s(\alpha,\rho)$ ja *ylempi mekaaninen sana* $s'(\alpha,\rho)$ muodostamalla jonot $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ kaavoilla

$$\begin{aligned} s(\alpha,\rho)(n) &= \lfloor\alpha(n+1)+\rho\rfloor - \lfloor\alpha n+\rho\rfloor \quad \text{ja} \\ s'(\alpha,\rho)(n) &= \lceil\alpha(n+1)+\rho\rceil - \lceil\alpha n+\rho\rceil. \end{aligned}$$

Lemman 5.10 nojalla todellakin $s(\alpha, \rho)(n), s'(\alpha, \rho)(n) \in \{0, 1\}$ kaikilla $n \geq 0$.

Lukua α kutsutaan sanojen $s(\alpha, \rho)$ ja $s'(\alpha, \rho)$ *kaltevuudeksi* ja lukua ρ näiden sanojen *leikkauspisteeksi*. Olkoon l yhtälön $y = \alpha x + \rho$ määräämä tasosuora. Alempi ja ylempi mekaaninen sana voidaan kumpikin tulkita suoran l diskretisoinniksi. Tarkastellaan pisteitä P_n, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja, ja jotka ovat välittömästi suoran l alapuolella. Pisteet saadaan ilmeisesti kaavasta $P_n = (n, \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)$. Vastaavasti välittömästi suoran l yläpuolella olevat pisteet P'_n, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja, saadaan kaavasta $P'_n = (n, \lceil \alpha n + \rho \rceil)$. Näin ollen jos pisteiden P_n ja P_{n+1} välille (ja vastaavasti pisteiden P'_n ja P'_{n+1} välille) piirretään viiva, niin viiva on vaakasuora mikäli $s(\alpha, \rho)(n) = 0$ ja vino, jos $s(\alpha, \rho)(n) = 1$. Tilannetta selventää seuraava kuva.



Kuvasta selkenee miksi lukua $h(x)$ kutsutaan sanan x korkeudeksi. Kuvan sanan 0010010001 korkeus on 3, ja kuten kuvasta nähdään, niin sekä alempaa että ylempää mekaanista sanaa vastaavien murtoviivojen korkeus kasvaa yhdellä kuvan esittämällä välillä kolme kertaa.

Tutkitaan sitten milloin $s(\alpha, \rho) \neq s'(\alpha, \rho)$. Määritelmien pohjalta on ilmeistä, että $s(0, \rho) = s'(0, \rho) = 0^\omega$ ja $s(1, \rho) = s'(1, \rho) = 1^\omega$. Seuraavassa lemmassa tarkastellaan tapausta $0 < \alpha < 1$. Käytetään lemman väitteessä edeltäviä merkintöjä.

Lemma 5.12. *Oletetaan, että* $0 < \alpha < 1$. *Olkoot* $s(\alpha, \rho)$ *ja* $s'(\alpha, \rho)$ *suoraa* l *vastaavat mekaaniset sanat. Jos suoralla* l *on kokonaislukupiste* $(n, \alpha n + \rho)$, *niin* $s(\alpha, \rho)(n) \neq s'(\alpha, \rho)(n)$ *ja* $s(\alpha, \rho)(n + 1) \neq s'(\alpha, \rho)(n + 1)$. *Erityisesti jos luku* α *on irrationaalinen, niin nämä sanat eroavat korkeintaan tekijällä, jonka pituus on* 1 *tai* 2.

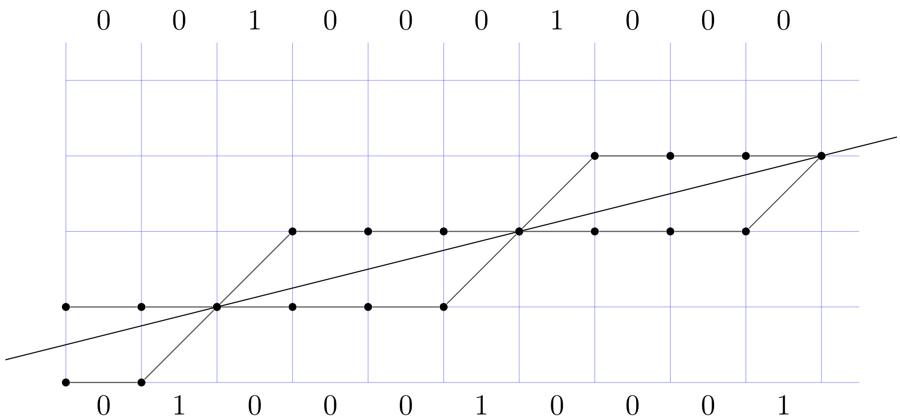
Todistus. Todistusta selkeyttää huomattavasti jäljempänä oleva kuva tilanteesta, jossa suoralla l on kokonaislukupiste.

Ensinnäkin yhtälö $1 + \lfloor \alpha n + \rho \rfloor = \lceil \alpha n + \rho \rceil$ on voimassa, jos ja vain jos luku $\alpha n + \rho$ ei ole kokonaisluku. Oletetaan, että $\alpha n + \rho$ on kokonaisluku jollakin $n \geq 0$. Tällöin $\alpha(n + 1) + \rho$ ei ole kokonaisluku, sillä muutoin olisi, että $\alpha = 1$. Näin ollen $\lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor \neq \lceil \alpha(n+1)+\rho \rceil$, ja siis $0 = s(\alpha, \rho)(n) \neq s'(\alpha, \rho)(n) = 1$. Samoin päättelemällä nähdään, että myös $1 = s(\alpha, \rho)(n - 1) \neq s'(\alpha, \rho)(n - 1) = 0$, kunhan $n \geq 1$. Siis mekaaniset sanat $s(\alpha, \rho)$ ja $s'(\alpha, \rho)$ eroavat suoran l kokonaislukupisteitä vastaavissa kohdissa.

Oletetaan, että luku α on irrationaalinen. Tällöin suoralla l on korkeintaan yksi kokonaislukupiste, muutoinhan kulmakertoimeksi saataisiin rationaaliluku. Jos $\alpha(n + 1) + \rho$ on kokonaisluku jollakin $n \geq 0$, niin edeltävän mukaan sanat $s(\alpha, \rho)$ ja $s'(\alpha, \rho)$ eroavat tekijällä, jonka pituus on 2. Jos taas $\rho = 0$, niin nämä sanat eroavat vain ensimmäiseltä aakkoseltaan eli tekijällä, jonka pituus on 1. □

Mekaanista sanaa kutsutaan *irrationaaliseksi*, jos luku α on irrationaalinen. Muutoin sana on *rationaalinen.*

Alla olevassa kuvassa on suora, jonka kulmakerroin on rationaalinen, ja vastaavat mekaaniset sanat. Kuvan yläreunassa on ylempi mekaaninen sana ja alareunassa alempi.



Kuvan perusteella vaikuttaisi siltä, että jos kaltevuus α on rationaaliluku, niin vastaavat mekaaniset sanat ovat lopulta jaksollisia. Täten vaikuttaisi luontevalta ajatella, että kaltevuuden ollessa irrationaalinen, vastaavat mekaaniset sanat ovat jaksottomia. Näin todella onkin, ja tämä tosiseikka todistetaan lemmassa 5.18.

Tarkastellaan vielä erityistapausta $0 < \alpha < 1$, $\rho = 0$. Tällöin selvästi $s(\alpha,0)(0) = \lfloor \alpha \rfloor = 0$ ja $s'(\alpha,0)(0) = \lceil \alpha \rceil = 1$. Jos luku α on irrationaalinen, niin tällöin $s(\alpha,0) = 0c_\alpha$ ja $s'(\alpha,0) = 1c_\alpha$, sillä suoralla l ei ole muita kokonaislukupisteitä. Tässä sanaa c_α kutsutaan luvun α *karakteristiseksi sanaksi*. Karakteristisia sanoja ei käsitellä tarkemmin tässä tutkielmassa. Lisätietoja niistä löytää esimerkiksi kirjasta [AS03], jossa on myös hyvä kirjallisuusluettelo.

Huomautus 5.13. Aiemmin rajoituttiin tarkastelemaan tapauksia, joissa $0 \le \alpha \le 1$ ja $0 \le \rho < 1$. Tämä rajoitus on kuitenkin näennäinen ja se tehtiin yksinkertaisuuden vuoksi. Yleisemmät tapaukset voidaan palauttaa rajoitettuun tapaukseen.

Ensinnäkin koska $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ ja $\lceil x + k \rceil = \lceil x \rceil + k$, kun k on kokonaisluku, niin voidaan olettaa, että $0 \le \rho < 1$. Oletetaan sitten, että reaaliluvulle α on asetettu vain rajoitus $\alpha \ge 0$. Nyt lemman 5.10 mukaan $s(\alpha,\rho), s'(\alpha,\rho) \in \{\lfloor \alpha \rfloor, 1 + \lfloor \alpha \rfloor\}^*$. Siis sanat $s(\alpha,\rho)$ ja $s'(\alpha,\rho)$ ovat edelleen binäärisanoja, mutta kenties yli eri aakkoston. Tämä aakkosto saadaan palautettua aakkostoksi $\{0,1\}$ kaavoilla

$$\begin{aligned} s(\alpha,\rho)(n) &= \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor \quad \text{ja} \\ s'(\alpha,\rho)(n) &= \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil - \lfloor \alpha \rfloor. \end{aligned}$$

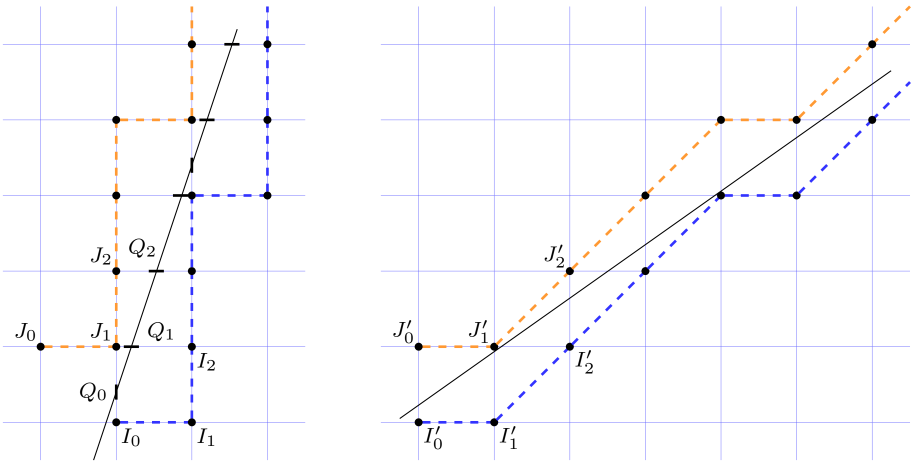
Näin ollen voidaan tehdä oletus, että $0 \le \alpha \le 1$.

5.3 Leikkaussanat

Tässä luvussa esitetään toisenlainen tulkinta mekaanisille sanoille leikkaussanojen avulla. Koska aihe on hieman sivupolulla Sturmin sanoista, niin kaikkia väitteitä ei perustella aivan täsmällisesti, vaan vedotaan lukijan geometriseen intuitioon. Tämä aliluku seuraa ja tarkentaa kirjan [Lot02] leikkaussanoja käsittelevään kohtaa. Lisää leikkaussanoista voi lukea artikkelista [Cri+93].

Tarkastellaan jälleen tasosuoraa l, jonka määrittää yhtälö $y = \beta x + \rho$, mutta oletetaan nyt vain, että $\beta > 0$, oletus $0 \le \rho < 1$ pidetään edelleen voimassa. *Hila* on tässä yhteydessä sellaisten suorien joukko tasossa, jotka ovat vaaka- tai pystysuoria ja joiden x- ja y-akselin leikkauspisteiden koordinaatit ovat kokonaislukuja. *Hilapisteet* ovat näiden suorien leikkauspisteet. Tarkastellaan sitten suoran l leikkauspisteitä hilan sellaisten pisteiden kanssa, joiden koordinaatit ovat epänegatiivisia. Toisin sanoen tällaiset pisteet sijaitsevat ensimmäisessä neljänneksessä. Näin saadaan jono $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots$ leikkauspisteitä. Nimetään sitten nämä leikkauspisteet. Leikkauspistettä $Q_n = (x_n, y_n)$ kutsutaan *vaakasuoraksi*, jos luku y_n on kokonaisluku. Vastaavasti leikkauspiste Q_n on *pystysuora*, jos luku x_n on kokonaisluku. Saattaa myös olla, että kumpikin luvuista x_n ja y_n on kokonaisluku. Tässä tapauksessa lisätään jonoon (Q_n) ennen pistettä Q_n pisteen Q_n kopio Q_{n-1}, numeroidaan jono uudelleen ja sovitaan, että piste Q_{n-1} on vaakasuora ja piste Q_n pystysuora. Valinta voidaan toki tehdä toisinkin päin, mutta olennaista on, että aina valitaan samoin. Tätä valintaa kutsutaan valinnaksi A ja toista valintaa valinnaksi B.

Leikkaussanatkin ymmärtää helpoiten kuvasta. Alla olevassa kuvassa vasemmalla on leikkaussana ja oikealla vastaava mekaaninen sana. Tarkemmin kuvan merkitykseen päästään jäljempänä.



Jonosta (Q_n) saadaan muodostettua ääretön sana käymällä läpi jono (Q_n) ja kirjoittamalla symbolin 0 jokaista pystysuoraa leikkauspistettä kohti ja symbolin 1 jokaista vaakasuoraa leikkauspistettä kohden. Tällä tavalla saatua sanaa $K(\beta, \rho)$ kutsutaan *alemmaksi leikkaussanaksi*. Tekemällä edellisessä kappaleessa mainittu valinta toisin saadaan samalla menettelyllä *ylempi leikkaussana* $K'(\beta, \rho)$.

Nyt nähdään, että sellaiset tapaukset, joissa $\rho \geq 0$, voidaan palauttaa tapauksiin, joissa $0 \leq \rho < 1$. Oletetaan, että $\rho \geq 1$. On ilmeistä, että suoran

$y = \beta x + \rho - 1$ leikkauspiste on vaakasuora, jos ja vain jos suoran $y = \beta x + \rho$ leikkauspiste on vaakasuora. Täten kumpaakin suoraa vastaavat leikkaussanat ovat yhtä suuret.

Osoitetaan sitten, että leikkaussanat ovat mekaanisia sanoja. Muodostetaan jokaista leikkauspistettä $Q_n = (x_n, y_n)$ kohden kokonaislukupiste $I_n = (u_n, v_n)$: jos leikkauspiste Q_n on pystysuora, niin piste I_n on leikkauspisteen Q_n alapuolella oleva hilapiste, ja jos leikkauspiste Q_n on vaakasuora, niin piste I_n on se hilapiste, johon päädytään liikkumalla alas ja oikealle. Tarkemmin sanottuna

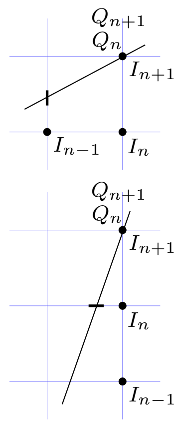
$$I_n = (u_n, v_n) = \begin{cases} (\lceil x_n \rceil, y_n - 1), & \text{jos } Q_n \text{ on vaakasuora,} \\ (x_n, \lfloor y_n \rfloor), & \text{jos } Q_n \text{ on pystysuora.} \end{cases}$$

Vastaavaan tapaan määritellään kokonaislukupisteet $J_n = (u'_n, v'_n)$ suoran l yläpuolelle (ks. kuva):

$$J_n = (u'_n, v'_n) = \begin{cases} (\lfloor x_n \rfloor, y_n), & \text{jos } Q_n \text{ on vaakasuora,} \\ (x_n - 1, \lceil y_n \rceil), & \text{jos } Q_n \text{ on pystysuora.} \end{cases}$$

Lemma 5.14. *Jos on tehty valinta A, niin $u_n + v_n = n$ kaikilla $n \geq 0$. Jos taas on tehty valinta B, niin $u'_n + v'_n = n$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Jos on tehty valinta A ja piste Q_n ei ole kokonaislukupiste, niin aina siirryttäessä pisteestä I_n pisteeseen I_{n+1} täsmälleen toinen koordinaateista kasvaa yhdellä. Sanotaan, että pisteet I_n ja I_{n+1} eroavat yhdellä. Samoin käy pisteille J_n, jos tehdään valinta B.



Oletetaan sitten, että on tehty valinta A ja että Q_n on kokonaislukupiste. Olkoon Q_{n+1} pisteen Q_n kopio. Piste Q_n on siis vaakasuora ja piste Q_{n+1} pystysuora. Ensinnäkin pisteet I_n ja I_{n+1} eroavat yhdellä, mikä nähdään pisteet I_i määrittelevistä kaavoista. Pitää siis osoittaa vain, että pisteet I_n ja I_{n-1} eroavat yhdellä. Jos piste Q_{n-1} on pystysuora, niin $y_{n-1} < y_n$ ja täten $v_n - v_{n-1} = y_n - 1 - \lfloor y_{n-1} \rfloor = \lfloor y_{n-1} \rfloor - \lfloor y_{n-1} \rfloor = 0$ ja $u_n - u_{n-1} = x_n - x_{n-1} = x_n - (x_n - 1) = 1$. Jos piste Q_{n-1} on vaakasuora, niin $y_n = y_{n-1} + 1$ ja täten $v_n - v_{n-1} = y_n - 1 - (y_{n-1} - 1) = 1$ ja $u_n - u_{n-1} = x_n - \lceil x_{n-1} \rceil = x_n - x_n = 0$. Siis pisteet I_n ja I_{n-1} eroavat yhdellä.

Koska $u_0 + v_0 = 0$ ja pisteet I_n ja I_{n+1} eroavat yhdellä kaikilla $n \geq 0$, niin päätellään, että $u_n + v_n = n$ kaikilla $n \geq 0$.

Samanlaisin päättelyin nähdään, että valinnan B tapauksessa $u'_n + v'_n = n$ kaikilla $n \geq 0$.

Huomaa, että jos tehdään valinta B, niin ei ole voimassa, että $u_n + v_n = n$ kaikilla $n \geq 0$. Tällöin kokonaislukupisteen Q_n kohdalla pisteet I_n ja I_{n+1} menevät väärään järjestykseen, ja esimerkiksi pisteet I_n ja I_{n-1} eroavat kahdella. Samoin jos tehdään valinta A, niin pisteet I'_n ja I'_{n+1} menevät väärään järjestykseen. □

Oletetaan, että $Q_n = 1$. Jos myös Q_{n+1} on vaakasuora, niin $v_{n+1} = v_n + 1$. Jos Q_{n+1} on pystysuora, niin myös $v_{n+1} = v_n + 1$. Samoin näytetään, että jos $Q_n = 0$, niin $v_{n+1} = v_n$. Täten

$$K(\beta, \rho)(n) = v_{n+1} - v_n = 1 + u_n - u_{n+1},$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus näytetään samankaltaisilla pikku päättelyillä. Vastaavasti pisteille J_n pätee:

$$K'(\beta, \rho)(n) = v'_{n+1} - v'_n = 1 + u'_n - u'_{n+1}.$$

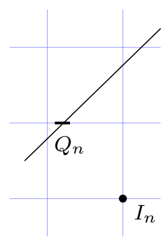
Lemma 5.15. *Oletetaan, että on tehty valinta A. Tällöin leikkauspiste Q_n on pystysuora, jos ja vain jos*

$$v_n \leq \beta u_n + \rho < 1 + v_n, \tag{5.7}$$

ja leikkauspiste Q_n on vaakasuora, jos ja vain jos

$$1 + v_n \leq \beta u_n + \rho < 1 + \beta + v_n. \tag{5.8}$$

Todistus. Todistuksen vaiheita selkeyttää oheinen kuva. Jos leikkauspiste Q_n on pystysuora, niin epäyhtälöt (5.7) seuraavat suoraan pisteiden $I_n = (u_n, v_n)$ määritelmästä. Oletetaan sitten, että leikkauspiste $Q_n = (x_n, y_n)$ on vaakasuora. Tällöin luku x_n kuuluu välille $(\lceil x_n \rceil - 1, \lceil x_n \rceil]$. Jos $x_n = \lceil x_n \rceil$, niin $\beta u_n + \rho = \beta x_n + \rho = y_n = v_n + 1$. Toisaalta koska $\beta(\lceil x_n \rceil - 1) + \rho < y_n$, niin $\beta u_n + \rho = \beta \lceil x_n \rceil + \rho < 1 + \beta + v_n$. Epäyhtälöt (5.8) ovat siis voimassa.



Koska epäyhtälöt (5.7) ja (5.8) ovat toisensa poissulkevia, niin myös käänteiset väitteet ovat voimassa. □

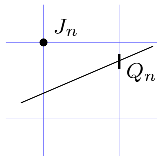
Lemma 5.16. *Oletetaan, että on tehty valinta B. Tällöin leikkauspiste Q_n on pystysuora, jos ja vain jos*

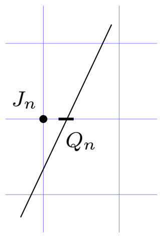
$$v'_n - 1 - \beta < \beta u'_n + \rho \leq v'_n - \beta. \tag{5.9}$$

ja leikkauspiste Q_n on vaakasuora, jos ja vain jos

$$v'_n - \beta < \beta u'_n + \rho \leq v'_n. \tag{5.10}$$

Todistus. Jälleen oheiset kuvat selkeyttävät todistusta. Oletetaan, että leikkauspiste $Q_n = (x_n, y_n)$ on pystysuora. Tällöin luku y_n on välillä $(\lceil y_n \rceil - 1, \lceil y_n \rceil]$. Jos $y_n = \lceil y_n \rceil$, niin yhtälöstä $\beta x_n + \rho = y_n$ seuraa, että $v'_n - \beta = y_n - \beta = \beta(x_n - 1) + \rho = \beta u'_n + \rho$. Samoin yhtälöstä $\beta x_n + \rho > \lceil y_n \rceil - 1$ seuraa, että $\beta u'_n + \rho = \beta(x_n - 1) + \rho > \lceil y_n \rceil - 1 - \beta = v'_n - 1 - \beta$. Nähdään, että epäyhtälöt (5.9) ovat voimassa.





Oletetaan sitten, että leikkauspiste Q_n on vaakasuora. Tällöin luku x_n on välillä $[\lfloor x_n \rfloor, \lfloor x_n \rfloor + 1)$. Jos $x_n = \lfloor x_n \rfloor$, niin $\beta u'_n + \rho = \beta x_n + \rho = y_n = v'_n$. Lopuksi yhtälöstä $y_n < \beta(\lfloor x_n \rfloor + 1) + \rho$ seuraa, että $v'_n - \beta = y_n - \beta < \beta \lfloor x_n \rfloor + \rho = \beta u_n + \rho$. Näin myös epäyhtälöt (5.10) nähdään tosiksi.

Koska epäyhtälöt (5.9) ja (5.10) ovat toisensa poissulkevia, niin myös käänteiset väitteet ovat voimassa. □

Oletetaan sitten, että ollaan tehty valinta A. Tarkastellaan sitten tason transformaatiota $(x, y) \mapsto (x+y, y)$. Laskemalla nähdään, että transformaatio kuvaa suoran $y = \beta x + \rho$ suoraksi $y = \beta/(1+\beta)x + \rho/(1+\beta)$. Koska lemman 5.14 mukaan $u_n + v_n = n$ kaikilla $n \geq 0$, niin piste $I_n = (u_n, v_n)$ kuvautuu pisteeksi $I'_n = (n, v_n)$.

Osoitetaan vielä, että

$$v_n = \left\lfloor \frac{\beta}{1+\beta} n + \frac{\rho}{1+\beta} \right\rfloor . \tag{5.11}$$

Kirjoittamalla $u_n = n - v_n$ ja muokkaamalla suoraviivaisesti epäyhtälöistä (5.7) saadaan, että

$$v_n \leq \frac{\beta}{1+\beta} n + \frac{\rho}{1+\beta} < v_n + \frac{1}{1+\beta},$$

ja epäyhtälöistä (5.8) seuraa samaan tapaan, että

$$v_n + \frac{1}{1+\beta} \leq \frac{\beta}{1+\beta}n + \frac{\rho}{1+\beta} < 1 + v_n.$$

Koska $1/(1+\beta) > 0$, niin johdetut epäyhtälöt osoittavat, että yhtälö (5.11) on voimassa olipa vastaava leikkauspiste Q_n vaakasuora tai pystysuora. Tämä osoittaa, että pisteet I'_n ovat aivan suoran $y = \beta/(1+\beta)x + \rho/(1+\beta)$ alapuolella olevat kokonaislukupisteet.

Tarkastellaan mekaanista sanaa $s = s(\beta/(1+\beta), \rho/(1+\beta))$. Oletetaan sitten, että $K(\beta,\rho)(n) = 1$. Tällöin leikkauspiste $Q_n = (x_n, y_n)$ on vaakasuora ja $v_n = y_n - 1$. Olipa leikkauspiste Q_{n+1} vaakasuora tai pystysuora, niin $v_{n+1} = v_n + 1$. Täten $s(n) = v_{n+1} - v_n = 1 = K(\beta,\rho)(n)$. Jos taas leikkauspiste Q_n on pystysuora, niin välttämättä $v_{n+1} = v_n$. Tällöin myös $s(n) = v_{n+1} - v_n = 0 = K(\beta,\rho)(n)$. Täten päätellään, että sana $K(\beta,\rho)$ on yhtä suuri mekaanisen sanan s kanssa.

Jos taas on tehty valinta B, niin piste J_n kuvautuu lemman 5.14 nojalla pisteeksi $J'_n = (n, v'_n)$. Aivan kuten edellä voidaan muokkaamalla suoraviivaisesti epäyhtälöitä (5.9) ja (5.10) osoittaa, että

$$v'_n = \left\lceil \frac{\beta}{1+\beta}n + \frac{\rho}{1+\beta} \right\rceil.$$

Käyttäen samaa transformaatiota $(x,y) \mapsto (x+y, y)$ päätellään edeltävän kaltaisilla pikku askelilla, että $K'(\beta,\rho) = s'(\beta/(1+\beta), \rho/(1+\beta))$.

Koska transformaatio $(x,y) \mapsto (x+y,y)$ on bijektiivinen lineaarikuvaus, niin mekaaniset sanat voidaan käsittää leikkaussanoina. Päätellään, että leikkaussanat ovat vain toinen tapa käsitellä mekaanisia sanoja.

5.4 Mekaaniset sanat ja Sturmin sanat

Tässä aliluvussa todistetaan, että Sturmin sanoilla on luonnehdinta mekaanisina sanoina. Aiemmat Sturmin sanojen määritelmät eivät ole antaneet tapaa rakentaa Sturmin sanoja. Tässä aliluvussa nähdään, että Sturmin sanoja voidaan yksinkertaisesti rakentaa irrationaalilukuja hyödyntäen. Päätulos on lause 5.17, jonka todistivat Morse ja Hedlund artikkelissaan [MH40].

Lause 5.17. *Ääretön sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos se on irrationaalinen mekaaninen sana.*

Todistus. Alla olevien lemmojen 5.18 ja 5.19 mukaan sana x on irrationaalinen mekaaninen sana, jos ja vain jos sana x on tasapainotettu ja jaksoton. Väite seuraa nyt lauseesta 4.13. □

Lemma 5.18. *Olkoon x mekaaninen sana, jonka kaltevuus on α. Tällöin sana x on tasapainotettu, ja sen kaltevuus on α (ts. $\alpha = \lim_{n\to\infty} \pi(x_n)$, ks. määritelmä 5.5 s. 21). Jos luku α on rationaalinen, niin sana x on täysin jaksollinen. Luvun α ollessa irrationaalinen sana x on jaksoton.*

Todistus. Olkoon x alempi mekaaninen sana. Todistus menee samoin ylemmälle mekaaniselle sanalle. Sanan x m-tekijän $u = [n, n+m-1]$ korkeus saadaan laskemalla korkeusero. Siis $h(u) = \lfloor \alpha(n+m) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Käyttäen epäyhtälöä (5.6) saadaan, että

$$\alpha|u| - 1 < h(u) < \alpha|u| + 1. \tag{5.12}$$

Koska väleillä $(\alpha|u|-1, \lfloor \alpha|u| \rfloor)$ ja $(\lfloor \alpha|u| \rfloor + 1, \alpha|u|+1)$ ei ole kokonaislukuja, niin yhtälöstä (5.12) seuraa, että

$$\lfloor \alpha|u| \rfloor \leq h(u) \leq 1 + \lfloor \alpha|u| \rfloor.$$

Täten korkeus $h(u)$ voi saada vain peräkkäiset arvot $\lfloor \alpha|u| \rfloor$ tai $1 + \lfloor \alpha|u| \rfloor$. Siis sanan x tietynpituisten tekijöiden korkeudet eroavat korkeintaan yhdellä. Toisin sanoen sana x on tasapainotettu.

Yhtälöstä (5.12) saadaan jakamalla puolittain luvulla $|u|$ ja muokkaamalla, että

$$|\pi(u) - \alpha| < \frac{1}{|u|},$$

joten kun $|u| \to \infty$, niin $\pi(u) \to \alpha$. Siis luku α on tasapainotetun sanan x kaltevuus määritelmän 5.5 mielessä.

Jos luku α on irrationaalinen, niin lauseen 5.9 mukaan sana x on jaksoton. Oletetaan sitten, että α on rationaalinen, ja kirjoitetaan $\alpha = p/q$, missä kokonaisluvut p ja q ovat suhteellisia alkulukuja. Nyt $\lfloor \alpha(n+q) + \rho \rfloor = \lfloor \alpha n + p + \rho \rfloor = p + \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ kaikilla $n \geq 0$. Käyttäen tätä saadaan, että

$$\begin{aligned} s(\alpha, \rho)(n+q) &= \lfloor \alpha(n+q+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha(n+q) + \rho \rfloor \\ &= p + \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - p - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor = s(\alpha, \rho)(n) \end{aligned}$$

kaikilla $n \geq 0$. Sana x on siis täysin jaksollinen jaksonpituutenaan q. □

Lemma 5.19. *Olkoon x ääretön tasapainotettu sana. Jos sana x on jaksoton, niin sana x on irrationaalinen mekaaninen sana. Jos sana x on täysin jaksollinen, niin sana x on rationaalinen mekaaninen sana.*

Todistus. Koska sana x on tasapainotettu, niin määritelmän 5.5 mielessä sillä on kaltevuus α. Olkoon luku h_n sanan x n-prefiksin korkeus.

Väite: Olkoon τ mikä tahansa reaaliluku. Tällöin joko $h_n \leq \lfloor \alpha n+\tau \rfloor$ kaikilla $n \geq 0$ tai $h_n \geq \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ kaikilla $n \geq 0$.
Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen reaaliluku τ, että kumpikaan väitteen tapauksista ei ole voimassa. Tällöin on olemassa sellaiset luvut $n \geq 0$ ja $n+k$, että $h_n < \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ ja $h_{n+k} > \lfloor \alpha(n+k) + \tau \rfloor$ (tai on voimassa symmetrinen tapaus $h_n > \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ ja $h_{n+k} < \lfloor \alpha(n+k) + \tau \rfloor$). Huomaa, että sellaisia tapauksia todella on, joissa $h_n < \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$. Muutoin olisi voimassa, että $h_t \geq \lfloor \alpha t + \tau \rfloor$ kaikilla $t \geq 0$, mutta oletettiin, että näin ei ole. Käyttäen vastaoletusta ja epäyhtälöä (5.6) saadaan, että

$$h_{n+k} - h_n \geq \lfloor \alpha(n+k) + \tau \rfloor - \lfloor \alpha n + \tau \rfloor + 2 \overset{(5.6)}{>} 1 + \alpha k,$$

josta saadaan jakamalla puolittain luvulla k ja muokkaamalla, että

$$\pi([n+1, n+k]_x) - \alpha > \frac{1}{k},$$

mikä on ristiriita epäyhtälön (5.3) kanssa. $\square$

Olkoon $S = \{\tau : h_n \leq \lfloor \alpha n + \tau \rfloor \text{ kaikilla } n \geq 0\}$. Koska $h_n \geq 0$, niin joukko S on alhaalta rajoitettu. Asetetaan $\rho = \inf S$. Epäyhtälön (5.3) mukaan $h_n \leq \alpha n + 1$, joten $h_n \leq \lfloor \alpha n + 1 \rfloor$. Täten $1 \in S$, jolloin $\rho \leq 1$. Luvun α ollessa irrationaalinen on voimassa, että $\rho < 1$, sillä muutoin epäyhtälössä (5.3) olisi voimassa yhtäsuuruus, mikä on mahdotonta.

Osoitetaan, että kaikilla $n \geq 0$ on voimassa

$$h_n \leq \alpha n + \rho \leq h_n + 1. \tag{5.13}$$

Muutoin on olemassa sellainen $k \geq 0$, että $h_k + 1 < \alpha k + \rho$. Kirjoitetaan $\sigma = h_k + 1 - \alpha k$. Tällöin $\sigma < \rho$ ja $\alpha k + \sigma = h_k + 1 > h_k$. Edellä todistetun väitteen mukaan $h_n \leq \lfloor \alpha n + \sigma \rfloor$ kaikilla $n \geq 0$. Siis $\sigma \in S$, jolloin $\rho \leq \sigma$, mikä on mahdotonta. Tämä ristiriita näyttää epäyhtälön (5.13) todeksi.

1° Oletetaan, että sana x on jaksoton. Tällöin lauseen 5.9 nojalla α on irrationaaliluku. Täten luku $\alpha n + \rho$ on kokonaisluku korkeintaan yhdellä luvun n arvolla.

Oletetaan ensin, että $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ kaikilla $n \geq 0$. Jos $h_{n+1} = h_n$, niin sanassa x on indeksin $n+1$ kohdalla symboli $0 = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Samoin jos $h_{n+1} = h_n + 1$, niin indeksin $n + 1$ kohdalla on aakkonen $1 = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Täten $x = s(\alpha, \rho)$ (huomaa mekaanisten sanojen indeksointi nollasta alkaen).

Epäyhtälön (5.13) mukaan toinen mahdollisuus on, että $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ kaikilla paitsi yhdellä luvun n arvolla k. Tällöin siis $h_k + 1 = \alpha k + \rho$, ja täten $h_n = \lceil \alpha n + \rho - 1 \rceil$ kaikilla $n \geq 0$. Toisin sanoen $x = s'(\alpha, \rho - 1)$. Kaikenkaikkiaan sana x on irrationaalinen mekaaninen sana.

2° Oletetaan sitten, että sana x on täysin jaksollinen. Kirjoitetaan $x = u^\omega$ jollain sanalla u. Merkitään sanan x jaksonpituutta $q = |u|$. Tällöin kaltevuus $\alpha = \lim_{n\to\infty} \pi(u^n) = p/q$, missä $p = h(u) = h_q$. Mikäli luku $\alpha n + \rho$ ei ole milloinkaan kokonaisluku, niin – kuten kohdassa 1° – $x = s(\alpha, \rho)$. Huomaa, että tämä riippuu voimakkaasti luvusta ρ.

Oletetaan sitten, että $h_k = \alpha k + \rho$ jollakin $k \geq 0$. Osoitetaan seuraavaksi, että $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ kaikilla $n \geq 0$. Tästä seuraa, että $x = s(\alpha, \rho)$. Tehdään vastaoletus, että väite ei ole voimassa. Tällöin epäyhtälön (5.13) mukaan $h_t + 1 = \alpha t + \rho$ jollakin t. Koska $\alpha(t + q) + \rho = \alpha t + \alpha q + \rho = \alpha t + \rho + p = 1 + h_t + p = h_{t+q} + 1$, niin voidaan olettaa, että $k < t < k + q$. Tarkastellaan sitten sanoja $y = [k + 1, t]_x$ ja $z = [t + 1, k + q]_x$. Nyt

$$\pi(y) = \frac{h_t - h_k}{t - k} = \frac{1}{|y|}(\alpha t + \rho - 1 - \alpha k - \rho) = \frac{1}{|y|}(\alpha|y| - 1) = \alpha - \frac{1}{|y|}.$$

Samaan tapaan laskemalla käyttäen tietoa, että $h_{k+q} = h_k + p = h_k + \alpha q$, saadaan, että $\pi(z) = \alpha + 1/|z|$. Täten

$$|\pi(y) - \pi(z)| = \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|},$$

mikä on ristiriita epäyhtälön (5.2) kanssa. Kuten edellä mainittiin, tämä ristiriita osoittaa, että $x = s(\alpha, \rho)$.

Saman tapaan osoitetaan, että jos $1 + h_k = \alpha k + \rho$ jollakin luvulla k, niin $h_n = \lceil \alpha n + \rho \rceil$ kaikilla $n \geq 0$. Tässä tapauksessa $x = s'(\alpha, \rho)$.

Kaikenkaikkiaan sana x on rationaalinen mekaaninen sana. □

Huomautus 5.20. Edellä nähtiin, että tasapainotettu ja ääretön sana, joka on jaksoton tai jaksollinen, on aina myös mekaaninen sana. Kaikki tasapainotetut ja äärettömät sanat eivät kuitenkaan ole mekaanisia. Tarkastellaan ääretöntä sanaa $x = 01^\omega$. Sana x on tasapainotettu, sillä kutakin luonnollista lukua n kohti sen n-tekijät ovat 1^n ja 01^{n-1}, ja näiden tekijöiden etäisyys on yksi. Sanan x kaltevuus on tietenkin 1. Kuitenkin välttämättä $s(1, \rho) = s'(1, \rho) = 1^\omega$ kaikilla $\rho \in \mathbb{R}$. Sana x ei siis ole mekaaninen.

Huomautus 5.21. Osoitetaan, että mekaanisten sanojen suffiksit ovat myös mekaanisia sanoja. Olkoon suora $l = \alpha x + \rho$ mekaanista sanaa s vastaava suora. Tekemällä suoran määrittävään lausekkeeseen sijoituksen $x = x + 1$ saadaan suora $l' = \alpha x + \alpha + \rho$, joka siirtää suoran l pisteiden x-koordinaatteja yhden yksikön vasemmalle. Muunnos säilyttää kuitenkin suoran l ylä- ja alapuolella olevien kokonaislukupisteiden korkeuserot (luku $\alpha + \rho$ voidaan myöskin vapaasti redusoida välille $[0, 1)$). Täten suora l' määrää muutoin saman mekaanisen sanan kuin suora l ensimmäistä aakkosta lukuun ottamatta, joka siis häviää. Näin ollen suora l' määrää sanan s sellaisen suffiksin s', että $s = as'$ jollain aakkosella a. Toistamalla menettelyä nähdään, että kaikki sanan s suffiksit ovat mekaanisia sanoja.

Huomaa myös, että mikäli luku α on irrationaalinen, niin myös sanan s suffiksien kaltevuus on irrationaalinen. Toisin sanoen Sturmin sanan suffiksit ovat Sturmin sanoja. Tämä antaa toisen todistuksen seuraukselle 4.4.

Mekaaniset sanat antavat näppärän tavan rakentaa Sturmin sanoja. Sovelletaan seuraavaksi mekaanisia sanoja ja osoitetaan, että tiettyä äärellistä tasapainotettua sanaa kohti on olemassa sellainen Sturmin sana, jonka prefiksi kyseessä oleva sana on.

Lemma 5.22. *Äärellinen sana w on jonkin Sturmin sanan tekijä, jos ja vain jos sana w on tasapainotettu.*

Todistus. Selvästi Sturmin sanan tekijät ovat tasapainotettuja. Oletetaan sitten, että sana w on tasapainotettu. Määritellään luvut

$$\alpha' = \max\left\{\pi(u) - \frac{1}{|u|}\right\} \quad \text{ja} \quad \alpha'' = \min\left\{\pi(u) + \frac{1}{|u|}\right\},$$

missä minimi ja maksimi otetaan yli kaikkien sanan w epätyhjien tekijöiden

u. Koska sana w on tasapainotettu, niin epäyhtälöstä (5.2) saadaan, että

$$\pi(u) - \frac{1}{|u|} < \pi(v) + \frac{1}{|v|},$$

kaikille epätyhjille sanan w tekijöille u ja v. Tästä seuraa, että $\alpha' < \alpha''$. Valitaan sitten sellainen irrationaaliluku α, että $\alpha' < \alpha < \alpha''$.

Luvun α valinnan nojalla kaikille sanan w tekijöille u pätee epäyhtälö

$$\pi(u) - \frac{1}{|u|} < \alpha < \pi(u) + \frac{1}{|u|},$$

josta seuraa, että

$$|\pi(u) - \alpha| < \frac{1}{|u|}. \tag{5.14}$$

Olkoon w_n sanan w n-prefiksi. Valitsemalla $\rho_n = h(w_n) - \alpha n$ saadaan, että $h(w_n) = \alpha n + \rho_n$. Kun $m > n$, niin kirjoittamalla $w_m = w_n u$ jollain sanalla u saadaan, että $h(w_m) - h(w_n) = h(u) = \alpha(m-n) + (\rho_m - \rho_n)$. Käyttäen epäyhtälöä (5.14) saadaan, että

$$|\rho_m - \rho_n| = |h(u) - \alpha(m-n)| = |u||\pi(u) - \alpha| < 1.$$

Asetetaan $\rho = \max\{\rho_n : 1 \leq n \leq |w|\}$. Nyt käyttäen edeltävää epäyhtälöä nähdään, että

$$n\alpha + \rho \geq h(w_n) = n\alpha + \rho + (\rho_n - \rho) > n\alpha + \rho - 1.$$

Täten $h(w_n) = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Koska tämä on voimassa kaikille $1 \leq n \leq |w|$, niin sana w on Sturmin sanan $s(\alpha, \rho)$ prefiksi. $\square$

5.5 Sovellus Sturmin morfismeihin

Tässä aliluvussa sovelletaan edellä todistettuja mekaanisten sanojen ominaisuuksia ja osoitetaan, että jäljempänä määritellyt tärkeät morfismit E, φ ja $\widetilde{\varphi}$ ovat niin sanottuja Sturmin morfismeja. Oikeastaan osoitetaan enemmän: etsitään mekaanisten sanojen $x = s(\alpha, \rho)$ ja $y = s'(\alpha, \rho)$ kuvien $E(x), E(y), \varphi(x), \varphi(y), \widetilde{\varphi}(x)$ ja $\widetilde{\varphi}(y)$ kaltevuuksille ja leikkauspisteille kaavat. Kaikki esitetyt tulokset todisti ensimmäisenä Parvaix artikkelissaan [Par97] vuonna 1997. Todistukset mukailevat kirjaa [Lot02].

Tässä aliluvussa oletetaan, että kaikki morfismit ovat aakkostolta $\{0, 1\}$ aakkostolle $\{0, 1\}$.

Määritelmä 5.23. Morfismi f on *Sturmin morfismi*, jos sana $f(x)$ on Sturmin sana kaikilla Sturmin sanoilla x.

Määritellään sitten seuraavat morfismit:

$$E : \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{array}, \quad \varphi : \begin{array}{l} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{array}, \quad \widetilde{\varphi} : \begin{array}{l} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 0. \end{array}$$

Huomaa, että morfismia φ käytettiin Fibonaccin sanan määrittelyssä, ja että tässä morfismi $\widetilde{\varphi}$ ei ole sama kuvaus kuin morfismin φ peilaus (morfismin ψ peilaus määriteltiin kaavalla $\widetilde{\psi}(u) = (\psi(u))^{\sim}$).

Morfismien E, φ ja $\widetilde{\varphi}$ avulla määritellään morfismit $G, \widetilde{G}, D$ ja $\widetilde{D}$ seuraavasti:

$$G = \varphi \circ E : \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01 \end{array}, \quad \widetilde{G} = \widetilde{\varphi} \circ E : \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 10 \end{array},$$
$$D = E \circ \varphi : \begin{array}{l} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 1 \end{array}, \quad \widetilde{D} = E \circ \widetilde{\varphi} : \begin{array}{l} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 1 \end{array}.$$

Huomaa, että koska $E^2 = id$, niin $\varphi = G \circ E = E \circ D$ ja $\widetilde{\varphi} = \widetilde{G} \circ E = E \circ \widetilde{D}$.

Lemma 5.24. *Morfismille E on voimassa, että $E(s(\alpha, \rho)) = s'(1-\alpha, 1-\rho)$ ja $E(s'(\alpha, \rho)) = s(1-\alpha, 1-\rho)$.*

Todistus. Ensinnäkin $-\lceil -x \rceil = \lfloor x \rfloor$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nimittäin $-x \leq \lceil -x \rceil$, joten $-\lceil -x \rceil \leq x$. Koska välillä $(-x, \lceil -x \rceil)$ ei ole kokonaislukuja, niin myöskään välillä $(-\lceil -x \rceil, x)$ ei ole. Täten $-\lceil -x \rceil = \lfloor x \rfloor$.

Olkoon $n \geq 0$. Käyttäen edellä johdettua kaavaa saadaan, että

$$\begin{aligned} s'(1-\alpha, 1-\rho)(n) &= \lceil (1-\alpha)(n+1) + 1 - \rho \rceil - \lceil (1-\alpha)n + 1 - \rho \rceil \\ &= \lceil n + 1 - \alpha(n+1) + 1 - \rho \rceil - \lceil n - \alpha n + 1 - \rho \rceil \\ &= 1 - (-\lceil -\alpha(n+1) - \rho \rceil + \lceil -\alpha n - \rho \rceil) \\ &= 1 - (\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor) \\ &= 1 - s(\alpha, \rho)(n). \end{aligned}$$

Toisin sanoen $s'(1-\alpha, 1-\rho)(n) = 0$ silloin ja vain silloin, kun $s(\alpha, \rho)(n) = 1$. Ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa, sillä juuri tämä on morfismin E vaikutus. Jälkimmäinen väite on symmetrinen. $\square$

Lemma 5.25. *Olkoon* $0 < \alpha < 1$. *Jos* $0 \leq \rho < 1$, *niin*

$$G(s(\alpha,\rho)) = s\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha}\right), \quad \widetilde{G}(s(\alpha,\rho)) = s\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho+\alpha}{1+\alpha}\right) \quad \textit{ja}$$
$$\varphi(s(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{1-\rho}{2-\alpha}\right).$$

Jos taas $0 < \rho \leq 1$, *niin*

$$G(s'(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha}\right), \quad \widetilde{G}(s'(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho+\alpha}{1+\alpha}\right) \quad \textit{ja}$$
$$\varphi(s'(\alpha,\rho)) = s\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{1-\rho}{2-\alpha}\right).$$

Todistus. Olkoon $s = a_0 a_1 \cdots, a_i \in A$, ääretön sana. Sanotaan, että luku n *osoittaa* aakkosen 1 k:nnen esiintymän, mikäli $h(a_0 \cdots a_n) = k$ ja $h(a_0 \cdots a_{n-1}) = k - 1$.

Jos $s = s(\alpha,\rho)$ ja $0 \leq \rho < 1$, niin tämä merkitsee, että

$$\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor = k \quad \text{ja} \quad \lfloor \alpha n + \rho \rfloor = k - 1. \tag{5.15}$$

Koska $\alpha < 1$, niin tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että $\alpha n + \rho < k \leq \alpha(n+1) + \rho$. Tämä puolestaan nähdään yksinkertaisilla muokkauksilla ekvivalentiksi seuraavan yhtälön kanssa:

$$n = \left\lceil \frac{k-\rho}{\alpha} - 1 \right\rceil. \tag{5.16}$$

Vastaavaan tapaan jos $s = s'(\alpha,\rho)$ ja $0 < \rho \leq 1$, niin

$$\lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil = k + 1 \quad \text{ja} \lceil \alpha n + \rho \rceil = k, \tag{5.17}$$

joka on ekvivalenttia sen kanssa, että

$$n = \left\lfloor \frac{k-\rho}{\alpha} \right\rfloor. \tag{5.18}$$

Olkoon $G(s(\alpha,\rho)) = b_0 b_1 \cdots, b_i \in A$. Osoittakoon luku n aakkosen 1 k:nnen esiintymän. Koska $G(1) = 01$, niin $G(a_0 \cdots a_n) = b_0 b_1 \cdots b_{n+k}$. Täten luku, joka osoittaa aakkosen 1 k:nnen esiintymän sanassa $G(s(\alpha,\rho))$ on

$$n + k = \left\lceil \frac{k - \frac{\rho}{1+\alpha}}{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1 \right\rceil.$$

Tämä osoitetaan suoralla laskulla. Käymällä yllä oleva ekvivalenssi (5.15) $\Longleftrightarrow$ (5.16) toiseen suuntaan tämä osoittaa, että $G(s(\alpha,\rho)) = s(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha})$.

Vastaavasti näytetään, että $G(s'(\alpha,\rho)) = s'(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha})$ ekvivalenssia (5.17) $\Longleftrightarrow$ (5.18) käyttäen.

Osoitetaan sitten, että mille tahansa äärettömälle sanalle x on voimassa, että

$$G(x) = 0\widetilde{G}(x). \tag{5.19}$$

Osoitetaan, että kaava $G(w)0 = 0\widetilde{G}(w)$ on voimassa äärellisille sanoille w. Kaava (5.19) seuraa tästä. Ensinnäkin tämä kaava pätee jos $w = 0$ tai $w = 1$. Oletetaan sitten, että kaava on voimassa sanalle w. Nyt $G(w1)0 = G(w)010 = 0\widetilde{G}(w)10 = 0\widetilde{G}(w1)$. Samoin $G(w0)0 = 0\widetilde{G}(w0)$. Väite seuraa induktiolla.

Jos mekaaninen sana $s(\alpha,\rho)$ alkaa aakkosella 0, niin $s(\alpha,\rho) = 0t$, missä $t = s(\alpha, \alpha+\rho)$. Soveltamalla tätä edellä johdettuun kaavaan (5.19) nähdään, että $\widetilde{G}(s(\alpha,\rho)) = s(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\alpha+\rho}{1+\alpha})$, kun $0 \leq \rho < 1$. Symmetrisesti osoitetaan kaava ylemmälle mekaanisella sanalla $s'(\alpha,\rho)$.

Koska $\varphi = G \circ E$, niin edeltävien kaavojen ja lemman 5.24 avulla saadaan laskettua, että $\varphi(s(\alpha,\rho)) = G(s'(1-\alpha, 1-\rho)) = s'(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{1-\rho}{2-\alpha})$ ja $\varphi(s'(\alpha,\rho)) = G(s(1-\alpha, 1-\rho)) = s(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{1-\rho}{2-\alpha})$. $\square$

Lemma 5.26. *Olkoon* $0 < \alpha < 1$. *Jos* $0 \leq \rho < 1$, *niin*

$$D(s(\alpha,\rho)) = s\left(\frac{1}{2-\alpha}, \frac{1-\alpha+\rho}{2-\alpha}\right), \quad \widetilde{D}(s(\alpha,\rho)) = s\left(\frac{1}{2-\alpha}, \frac{\rho}{2-\alpha}\right) \quad \textit{ja}$$
$$\widetilde{\varphi}(s(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}\right).$$

Jos taas $0 < \rho \leq 1$, *niin*

$$D(s'(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1}{2-\alpha}, \frac{1-\alpha+\rho}{2-\alpha}\right), \quad \widetilde{D}(s'(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1}{2-\alpha}, \frac{\rho}{2-\alpha}\right) \quad \textit{ja}$$
$$\widetilde{\varphi}(s'(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}\right).$$

Todistus. Koska $\widetilde{G} \circ E = \widetilde{\varphi} \circ E^2 = \widetilde{\varphi}$, niin edellisen lemman kaavoihin sijoittamalla saadaan suoraan, että $\widetilde{\varphi}(s(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}\right)$. $\widetilde{\varphi}(s'(\alpha,\rho)) = s'\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{2-\alpha-\rho}{2-\alpha}\right)$. Edelleen koska $D = E \circ \varphi$ ja $\widetilde{D} = E \circ \widetilde{\varphi}$, niin suoralla laskulla saadaan väitteen kaavat. $\square$

Seuraus 5.27. *Morfismit* $E, \varphi, \widetilde{\varphi}, G, \widetilde{G}, D$ *ja* $\widetilde{D}$ *ovat Sturmin morfismeja.*

Todistus. Olkoon x Sturmin sana. Lauseen 5.17 mukaan sanan x kaltevuus α on irrationaalinen. Lemmojen 5.24, 5.25 ja 5.26 mukaan morfismit $E, \varphi, \widetilde{\varphi}, G, \widetilde{G}, D$ ja $\widetilde{D}$ kuvaavat sanan x irrationaaliseksi mekaaniseksi sanaksi, joka on jälleen lauseen 5.17 mukaan Sturmin sana. $\square$

Huomautus 5.28. Itse asiassa on voimassa vahvempikin tulos: morfismi f on Sturmin morfismi, jos ja vain jos $f \in \{E, \varphi, \widetilde{\varphi}\}^*$ (morfismien E, φ ja $\widetilde{\varphi}$ mikä tahansa yhdiste voidaan tulkita sanaksi yli aakkoston $\{E, \varphi, \widetilde{\varphi}\}$). Toiseen suuntaan tulos on helppo: seurauksen 5.27 mukaan kahden Sturmin morfismin yhdiste on ilmeisesti Sturmin morfismi. Käänteinen väite on todistettu mm. teoksen [Lot02] lauseessa 2.3.7.

Tuloksen osoittivat ensimmäisinä Mignosi ja Séébold vuonna 1993 artikkelissaan [MS93]. Tämän tuloksen ja lemmojen 5.24, 5.25 ja 5.26 kaavojen perusteella mille tahansa Sturmin morfismille voidaan periaatteessa laskea vastaavan tyyppiset kaavat.

Huomautus 5.29. Mainitaan lyhyesti toinen artikkelissa [MS93] todistettu kiinnostava tulos.

Sanotaan, että morfismi f *generoi* sanan $x \in \{0,1\}^\omega$, jos on olemassa sellainen $n \geq 1$, että $x = (f^n)^\omega(a)$, missä $a \in \{0,1\}$. Mignosin ja Séeboldin tulos on, että morfismi f generoi Sturmin sanan, jos ja vain jos $f \in \{E, \varphi, \widetilde{\varphi}\}^* \setminus (\{E\}^* \cup \{G, \widetilde{G}\}^+ \cup \{D, \widetilde{D}\}^+)$.

Tämä on erityisen kiinnostavaa siksi, että tähän asti tutkielman ainut konkreettinen Sturmin sana on ollut Fibonaccin sana. Esitetyn tuloksen avulla on nyt helppo generoida Sturmin sanoja. Esimerkiksi morfismi

$$\psi = \varphi^2 \circ E \circ \varphi \circ E : \begin{array}{l} 0 \mapsto 01, \\ 1 \mapsto 01010 \end{array}$$

generoi Sturmin sanan

$$\psi^\omega(0) = 010101001010100101010010101010100101 \cdots,$$

sillä selvästi $\psi \in \{E, \varphi, \widetilde{\varphi}\}^* \setminus (\{E\}^* \cup \{G, \widetilde{G}\}^+ \cup \{D, \widetilde{D}\}^+)$.

6 Ketjut

Tässä luvussa tutkitaan nk. ketjuja, joiden avulla esitetään jälleen erilainen luonnehdinta Sturmin sanoille. Luvun päätulos on tämä luonnehdinta lauseessa 6.18 (s. 52), jonka todistamiseksi tarvitaan useita aputuloksia.

Tulokset ovat entuudestaan tunnettuja, mutta tutkielman kirjoittajan tietojen mukaan niitä ei ole kootusti esitetty aivan samassa muodossa kuin tässä tutkielmassa. Erityisesti on annettu uusia käsitteitä kuten ketjujoukko ja ketjusuljettu. Käsitteiden valintaa inspiroivat teoksen [Lot02] tasapainotettujen sanojen yhteydessä esitellyt käsitteet. Tulokset perustuvat viime kädessä artikkelien [MH40], [CH73] ja [Ric99] lauseisiin ja lemmoihin.

Määritelmä 6.1. Sanaa, joka alkaa ja päättyy aakkosella 0 ja sisältää täsmälleen n kertaa aakkosen 0 kutsutaan *n-ketjuksi.* Toisin sanoen n-ketju $w \in 0\{0,1\}^* \cap \{0,1\}^*0$ ja $|w|_0 = n$ Sana *ketju* tarkoittaa jotakin n-ketjua.

Huomaa, että ketjut ovat muotoa $0w_1 0w_2 0 \cdots 0w_k 0$, missä sanat w_i (kenties tyhjiä) muodostuvat kokonaan aakkosesta 1.

Morse ja Hedlund tutkivat artikkelissaan [MH38] myös ketjuja, mutta tässä määritellyt n-ketjut olivat heidän käsitteistönsä mukaan $(n+1)$-ketjuja – heille luku n merkitsi sanojen w_i lukumäärää. Heidän tuloksensa on siis helppo palauttaa tässä tutkielmassa käytetylle kielelle, joka mukailee artikkelin [Ric99] sanastoa.

Olkoon x äärellinen tai ääretön sana. Määritellään seuraavat joukot:

$$X_n(x) = \{w \in \mathcal{F}(x) \cap 0\{0,1\}^* \cap \{0,1\}^*0 : |w|_0 = n\},$$
$$Y_n(x) = \{w \in \mathcal{F}(x) \cap 1\{0,1\}^* \cap \{0,1\}^*1 : |w|_1 = n\}.$$

Mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole kirjoitetaan lyhyesti X_n ja Y_n merkintöjen $X_n(x)$ ja $Y_n(x)$ sijaan. Huomaa, että joukon X_n alkiot ovat n-ketjuja.

Joukot Y_n esitellään tässä lyhyesti, ja lisäksi tutkitaan niiden koon yhteyttä sanan jaksollisuuteen. Useissa jäljempänä seuraavissa lemmoissa käsitellään vain ketjuja, mutta lopuksi nähdään, että joukoilla Y_n on tärkeä rooli juuri Sturmin sanoja luonnehdittaessa.

Olkoon x ääretön sana. Jos sana w kuuluu joukkoon X_n, niin sanassa $w1^k0$ on $n+1$ kappaletta aakkosia 0, ja se alkaa ja päättyy aakkosella 0. Täten mikäli aakkonen 0 esiintyy sanassa x äärettömän usein (kuten vaikkapa Sturmin sanojen tapauksessa), niin joukon X_n alkiot voidaan laajentaa oikealle joukon X_{n+1} alkioiksi. Täten $|X_n| \leq |X_{n+1}|$, ja erityisesti luku $|X_n|$ on kasvava luvun n funktiona. Vastaavasti jos symboli 1 esiintyy sanassa x äärettömän usein, niin joukon Y_n alkiot voidaan laajentaa joukon Y_{n+1} alkioiksi. Lisäksi huomataan, että kullakin joukon X_{n+1} sanalla on suffiksina joukon X_n sana, ja analoginen havainto pätee joukon Y_{n+1} alkioille.

Osoitetaan sitten yhteys äärettömien sanojen jaksollisuuden ja joukkojen X_n ja Y_n koon välillä. Huomaa analogisuus lauseen 3.7 kanssa.

Lause 6.2. *Olkoon x ääretön sana. Seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) *Sana x on lopulta jaksollinen,*

(ii) $|X_n| = |X_{n+1}|$ *jollain* $n \geq 1$,

(iii) $|X_n| < n + k - 2$ *jollain* $n \geq 1$, *missä k on sanassa x esiintyvien aakkosten lukumäärä,*

(iv) $|X_n|$ *on rajoitettu.*

Vastaava tulos pätee joukoille Y_n.

Todistus. Jos aakkonen 0 ei esiinny äärettömän usein sanassa x, niin voidaan kirjoittaa $x = u1^\omega$. Tällöin $|X_n| = 0$ kaikilla $n > |u|$, joten väite on selvä. Oletetaan sitten, että aakkonen 0 esiintyy sanassa x äärettömän usein.

$(i) \implies (iv)$ Oletetaan, että sana x on lopulta jaksollinen. Merkitään $x = uv^\omega$. Olkoon $n \geq |uv|$. Koska sana x on lopulta jaksollinen, niin $|X_n| \leq |uv|$ eli $|X_n|$ on rajoitettu.

$(iv) \implies (iii)$ Oletetaan, että $|X_n|$ on rajoitettu. Väitettä edeltävien huomioiden nojalla luku $|X_n|$ ei vähene. Ehto (ii) saadaan siis voimaan valitsemalla sopivan suuri luku n.

$(iii) \implies (ii)$ Jos $x = 0^\omega$, niin väite on selvä. Oletetaan sitten, että $1 \in \mathcal{F}(x)$. Oletetaan, että m on pienin sellainen luku, että $|X_m| < m + k - 2$. Tehdään vastaoletus, että (ii) ei ole voimassa, eli että $|X_{n+1}| > |X_n|$ kaikilla $n \geq 1$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
|X_m| &= \sum_{i=2}^{m} (\underbrace{|X_i| - |X_{i-1}|}_{\geq 1}) + |X_1| \\
&\geq m - 1 + k - 1 = m + k - 2,
\end{aligned}
$$

mikä on ristiriita. Siis (ii) on voimassa.

$(ii) \implies (i)$ Oletetaan, että $|X_m| = k = |X_{m+1}|$ jollakin $m \geq 1$. Koska symboli 0 esiintyy sanassa x äärettömän usein, niin $k \geq 1$. Nyt joukon X_n sanat voidaan laajentaa oikealle joukon X_{n+1} sanoiksi. Merkitään $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ja $X_{n+1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Koska $|X_n| = |X_{n+1}|$, niin jokaista sanaa x_i kohti on olemassa yksikäsitteinen sellainen sana c_i, että $y_i = x_i c_i$ (numeroidaan sanat y_i sopivasti). Huomaa, että jotkin sanoista c_i voivat olla samoja. Merkitään näiden sanojen c_i joukkoa C. Toisaalta jokaisella sanalla y_i on suffiksina jokin joukon X_n sana. Näin ollen jokaista sanaa y_i kohden on olemassa sellainen sana d_i, että $y_i = d_i x_j$ jollakin sanalla x_j. Koska jokaista sanaa x_i seuraa aina sana c_i, niin voidaan muodostaa jono

$$y_i,\ y_i c'_1,\ y_i c'_1 c'_2,\ y_i c'_1 c'_2 c'_3,\ \ldots,$$

missä sanat $c'_l \in C$. Sanalle x saadaan siis esimerkiksi suffiksi $y_1 c'_1 c'_2 \cdots$ Koska joukko C on äärellinen, niin jossain vaiheessa sana $c'_1 c'_2 \cdots$ alkaa toistaa itseään syklisesti. Sana x on siis lopulta jaksollinen.

Argumentit toimivat joukolle Y_n, kun vaihdetaan aakkosten 0 ja 1 roolit. $\square$

Seuraus 6.3. *Jos x on ääretön ja jaksoton sana, niin $|X_n| < |X_{n+1}|$ ja $|Y_n| < |Y_{n+1}|$ kaikilla $n \geq 1$.* $\square$

6.1 Ketjujen yhteys tasapainoisuuteen

Tässä aliluvussa tutkitaan ns. ketjutasapainoisuuden käsitettä ja sen yhteyttä aiemmin määriteltyyn tasapainoisuuden käsitteeseen.

Sanajoukkoa X kutsutaan *ketjujoukoksi*, jos sen kaikki sanat ovat ketjuja. Laajennetaan sitten aliluvussa 4.3 esitettyä etäisyyskäsitettä. Olkoot x ja y sanoja – kenties eripituisia. Sanojen x ja y *etäisyys* on luku

$$\Delta(x, y) = |h(x) - h(y)|.$$

Sekaannuksen estämiseksi tässä käytetään symbolia Δ merkin δ sijaan. Myös tästä laajennetusta käsitteestä käytetään nimitystä etäisyys, vaikka se ei enää yhtä luontevaa olekaan.

Määritelmä 6.4. Ketjujoukko X on *ketjutasapainotettu*, jos kaikille joukon X n-ketjuille x ja y on voimassa, että $\Delta(x, y) \leq 1$ kaikilla $n \geq 0$.

Sanalla x sanotaan olevan ominaisuus $\mathcal{B}cc_n(x)$ (engl. Balanced Chain Condition), jos ketjujoukko $\mathcal{F}(x) \cap X_n(x)$ on ketjutasapainotettu. Jos tämä ominaisuus on voimassa kaikilla $n \geq 0$, niin kirjoitetaan, että sanalla x on ominaisuus $\mathcal{B}cc(x)$. Vaihtoehtoisesti voidaan tällöin sanoa, että sana x on *ketjutasapainotettu.*

Sanajoukko X on *ketjusuljettu*, jos jokainen $w \in X$, joka ei ole ketju, voidaan laajentaa joksikin joukon X ketjuksi. Tällöin, jos esimerkiksi sana $w \in X$ alkaa ja päättyy aakkosella 1, niin $01^*w1^*0 \cap X \neq \emptyset$.

Tutkitaan sitten miten tämä ketjutasapainoisuuden käsite liittyy aiemmin esitettyyn tasapainoisuuden käsitteeseen. Merkitään seuraavaa lemmaa varten, että $\mathcal{B}_n = \{x \in X : |x| = n\}$ ja $\mathcal{C}_n = \{x \in X : x \text{ on } n\text{-ketju}\}$.

Lemma 6.5. *Olkoon X epätyhjä, tekijäsuljettu ja ketjusuljettu joukko. Olkoon $k \geq 0$. Jos joukko $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{C}_i$ on ketjutasapainotettu, niin joukko $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{B}_i$ on tasapainotettu.*

Todistus. Oletetaan, että joukko $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{C}_i$ on ketjutasapainotettu. Joukot $\mathcal{B}_0$ ja $\mathcal{B}_1$ ovat selvästi tasapainotettuja. Tehdään sitten vastaoletus, että joukot $\mathcal{B}_i$ ovat tasapainotettuja, kun $0 \leq i \leq m+1$, ja että joukko $\mathcal{B}_{m+2}$ ei ole tasapainotettu, missä $2 \leq m+2 \leq k$. Soveltamalla lemmaa 4.12 joukkoon $Y = \bigcup_{i=0}^{m+2} \mathcal{B}_i$ – joka on tekijäsuljettu – nähdään, että on olemassa sellainen sana w, että $0w0, 1w1 \in Y$ ja $|w| = m$. Sana $0w0$ on r-ketju, missä $r = m - h(w) + 2$. Koska joukko X on ketjusuljettu, niin sana $1w1$ laajenee r-ketjuksi u. Nyt $r = m - h(w) + 2 \leq m + 2 \leq k$, mutta

$$\Delta(0w0, u) \geq \Delta(0w0, 1w1) = 2,$$

mikä on ristiriita sen kanssa, että joukko $\mathcal{C}_r$ on ketjutasapainotettu. □

Seuraus 6.6. *Olkoon X epätyhjä tekijäsuljettu ja ketjusuljettu joukko. Jos joukko X on ketjutasapainotettu, niin joukko X on tasapainotettu.* □

Muotoillaan edellinen lemma ja seuraus sanojen tekijäjoukoille. Äärettömän sanan tekijäjoukko on ketjusuljettu, jos esimerkiksi sana alkaa aakkosella 0 ja aakkonen 0 esiintyy siinä äärettömän usein.

Lemma 6.7. *Olkoon x sana, jonka tekijäjoukko on ketjusuljettu. Jos sanalla x on ominaisuus $\mathcal{B}cc_i(x)$ kaikilla $0 \leq i \leq k \leq |x|$, niin joukko $\mathcal{F}_i(x)$ on tasapainotettu kaikilla $0 \leq i \leq k$.* □

Seuraus 6.8. *Olkoon x äärellinen tai ääretön sana, jonka tekijäjoukko on ketjusuljettu. Jos sanan x tekijäjoukko on ketjutasapainotettu, niin sana x on tasapainotettu.* □

Huomaa, että edellisessä seurauksessa ei ole välttämätöntä, että sanan x tekijäjoukko olisi ketjusuljettu. Esimerkiksi sana 11010 on ketjutasapainotettu ja tasapainotettu, mutta se ei ole ketjusuljettu. Toisaalta ketjutasapainotettu sana, joka ei ole ketjusuljettu, ei välttämättä ole tasapainotettu. Esimerkiksi kelpaa sana 110100, joka ei ole tasapainotettu, sillä $\delta(11, 00) = 2$.

Tutkitaan sitten miten edellisen seurauksen väite voidaan kääntää.

Lemma 6.9. *Olkoon x äärellinen tai ääretön sana. Jos sana x on tasapainotettu, niin sana x on myös ketjutasapainotettu.*

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Selvästi $\mathcal{B}cc_0(x)$ ja $\mathcal{B}cc_1(x)$ ovat voimassa. Olkoot sanan x tekijät u ja v erisuuria 2-ketjuja. Ne ovat muotoa $u = 01^i0$ ja $v = 01^j0$, missä $i < j$. Tehdään vastaoletus, että $\Delta(u, v) \geq 2$. Tällöin $j - i \geq 2$. Koska $i < j$, niin on olemassa sellainen sanan x j-tekijä w, että sana u on sanan w tekijä. Koska $|w| = j$ ja $u = 01^i0 \in \mathcal{F}(w)$, niin $h(w) \leq j - 2 = h(v) - 2$, mistä seuraa, että $|h(w) - h(v)| = \delta(w, v) \geq 2$. Tämä on mahdotonta, sillä sana x on tasapainotettu. Päätellään, että $\mathcal{B}cc_2(x)$ on voimassa.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{B}cc_k(x)$ on voimassa kaikilla $k \leq n$, missä $n \geq 2$. Olkoot $u = 01^{a_1}01^{a_2}0 \cdots 01^{a_n}0$ ja $v = 01^{b_1}01^{b_2}0 \cdots 01^{b_n}0$ kaksi erisuurta $(n+1)$-ketjua. Merkitään $u' = 01^{a_2}0 \cdots 01^{a_n}0$ ja $v' = 01^{b_2}0 \cdots 01^{b_n}0$, ts. sanat u' ja v' ovat sanojen u ja v suffikseja ja n-ketjuja. Induktio-oletuksen perusteella $\Delta(u', v') \leq 1$ ja $\Delta(01^{a_1}0, 01^{b_1}0) \leq 1$. Täten

$$\Delta(u, v) \leq \Delta(u', v') + \Delta(01^{a_1}0, 01^{b_1}0) \leq 2.$$

Tehdään vastaoletus, että $\Delta(u, v) = 2$. Edeltävän epäyhtälön nojalla tämä tarkoittaa, että $\Delta(01^{a_1}0, 01^{b_1}0) = 1$, joten $|a_1 - b_1| = 1$. Oletetaan, että $b_1 = a_1 + 1$. Samoin $||u'| - |v'|| = 1$. Nyt on oltava, että $|v'| = |u'| + 1$. Muutoin $|u'| = |v'| + 1$, jolloin $h(u') = h(v') + 1$. Tällöin $\Delta(u, v) = 0$, mikä on vastoin oletusta. Tarkastellaan sitten sanoja $y = 01^{a_1}0 \cdots 01^{a_n}0$ ja $y' = 1^{b_1}0 \cdots 01^{b_n}$. Edeltävien tarkastelujen perusteella $|y| = |y'|$, mutta $\delta(y, y') = 2$, mikä on mahdotonta, sillä sana x on tasapainotettu. Täten $\Delta(u, v) \leq 1$, mikä näyttää, että $\mathcal{B}cc_{n+1}(x)$ on voimassa. □

Seuraus 6.8 ja lemma 6.9 antavat seuraavan tuloksen. Tulos on hieman yllättävä, sillä ketjutasapainoisuus vaikuttaa heikommalta ominaisuudelta kuin tasapainoisuus.

Seuraus 6.10. *Olkoon x äärellinen tai ääretön ketjusuljettu sana. Tällöin sana x on tasapainotettu, jos ja vain jos sana x on ketjutasapainotettu.* □

Osoitetaan sitten lemman 4.11 sekä väitteen että todistuksen kanssa analoginen tulos ketjuille.

Lemma 6.11. *Olkoon x ääretön, ketjusuljettu sana. Jos sana x on ketjutasapainotettu, niin $|X_n(x)| \leq n$ ja $|Y_n(x)| \leq n$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Osoitetaan, että $|X_n(x)| \leq n$ kaikilla $n \geq 0$. Väitteen toinen kohta todistetaan samaan tapaan, kun muistetaan, että seurauksen 6.10 mukaan sana x on tasapainotettu.

Väite on selvä tapauksissa $n = 0, 1$. Joukossa X_2 voi olla korkeintaan kaksi 2-ketjua, sillä ehdosta $\Delta(01^i0, 01^j0) \leq 1$ seuraa, että $|i-j| \leq 1$. Tapaus $n = 2$ on siis selvä.

Oletetaan sitten, että $n \geq 3$ on pienin luku, jolla väite ei ole voimassa. Tämä tarkoittaa, että $X_{n-1} \leq n-1$ ja $X_n \geq n+1$. Jokaisella n-ketjulla on suffiksina $(n-1)$-ketju. Voidaan siis määritellä kuvaus $\alpha : X_n \to X_{n-1}$, joka kuvaa n-ketjun suffiksikseen, joka on $(n-1)$-ketju. Jos kuvaus α olisi injektio, niin $|X_{n-1}| \geq |X_n| \geq n+1$, mikä on mahdotonta. Lisäksi korkeintaan kaksi n-ketjua voi kuvautua samaksi $(n-1)$-ketjuksi. Muutoinhan olisi olemassa sellainen $(n-1)$-ketju w ja sellaiset kokonaisluvut i, j ja k, $i < j < k$, että $01^iw, 01^jw, 01^kw \in X_n$. Tällöin tosin $\Delta(01^iw, 01^kw) \geq 2$, mikä on vastoin oletusta, että sana x on ketjutasapainotettu. Jotta ehto $|\alpha(X_n)| \leq n-1$ saataisiin voimaan, on oltava olemassa sellaiset erisuuret $(n-1)$-ketjut u ja v, että $01^{r_1}u, 01^{r_2}u, 01^{r_3}v, 01^{r_4}v \in X_n$, missä $r_1 \neq r_2$ ja $r_3 \neq r_4$. Koska väite on voimassa, kun $n = 2$, ja $r_1 \neq r_2$, niin $X_2 = \{01^{r_1}0, 01^{r_2}0\}$. Samasta syystä voidaan olettaa, että $r_3 = r_1$ ja $r_4 = r_2$.

Sana u ei voi olla sanan v prefiksi, koska sanat ovat molemmat n-ketjuja ja erisuuria. Täten voidaan kirjoittaa $u = xcu'$ ja $v = x\hat{c}v'$, missä x on sanojen u ja v pisin yhteinen prefiksi ja c aakkonen. Oletetaan, että $c = 0$, tapaus $c = 1$ on symmetrinen. Rajoituksetta voidaan olettaa, että $r_1 < r_4$ (toinen tapaus on $r_2 < r_3$). Koska sana x on ketjutasapainotettu, niin $r_4 = r_1+1$. Nyt

$\delta(01^{r_1}x0, 1^{r_4}x1) = 2$, mikä on ristiriita sen kanssa, että sana x on seurauksen 6.10 mukaan tasapainotettu. Tämä ristiriita todistaa väitteen. $\square$

6.2 Sturmin sanojen luonnehdinta ketjujen avulla

Vuonna 1999 Richomme julkaisi jälleen uuden luonnehdinnan Sturmin sanoille artikkelissaan [Ric99]. Tässä aliluvussa todistetaan tämä luonnehdinta sekä siihen liittyvä toinen – lauseen 4.13 kanssa analoginen – luonnehdinta ketjutasapainoisuuden avulla. Päätulos on lause 6.18.

Aivan ensimmäiseksi tutkitaan tarkemmin Sturmin sanojen muotoa.

Lemma 6.12. *Olkoon x Sturmin sana. Tällöin on olemassa sellaiset luvut n ja m, että* $01^*0 \cap \mathcal{F}(x) = \{01^n0, 01^{n+1}0\}$ *ja* $10^*1 \cap \mathcal{F}(x) = \{10^m1, 10^{m+1}1\}$.

Todistus. Olkoon $n \geq 0$ pienin sellainen luku, että $01^n0 \in \mathcal{F}(x)$. Oletetaan, että $01^t0 \in \mathcal{F}(x)$ jollain $t \geq 0$. Tällöin $t \leq n+1$. Nimittäin jos $t > n+1$, niin $1^{n+2} \in \mathcal{F}(x)$, jolloin $\delta(01^n0, 1^{n+2}) = 2$, mikä on ristiriita, sillä sana x on tasapainotettu.

Oletetaan, että $n = 0$. Koska molemmat aakkoset esiintyvät sanassa x äärettömän usein, niin $01^t0 \in \mathcal{F}(x)$ jollain $t \geq 1$. Toisaalta edeltävän nojalla $t \leq n+1 = 1$. Väite on siis voimassa tapauksessa $n = 0$. Oletetaan sitten, että $n > 0$. Tällöin $00 \notin \mathcal{F}(x)$. Nimittäin jos $00 \in \mathcal{F}(x)$ ja $n = 1$, niin seuraa ristiriita luvun n minimaalisuuden kanssa. Jos taas $n > 1$, niin $00 \notin \mathcal{F}(x)$, sillä sana x on tasapainotettu. Näin ollen tekijää 01^n0 seuraa aina tekijä 1^t0, ja todistuksen alun nojalla $t \leq n+1$. Tehdään vastaoletus, että $01^{n+1}0 \notin \mathcal{F}(x)$. Tällöin $t \leq n$, ja luvun n minimaalisuuden vuoksi $t = n$. Siis sanalla x on suffiksi $(1^n0)^\omega$, mikä on mahdotonta, sillä sana x on jaksoton. Päätellään, että väite on voimassa myös, kun $n > 0$.

Luvun m olemassaolo päätellään samaan tapaan. $\square$

Huomaa miten lemman väitteen luvut n ja m suhtautuvat toisiinsa. Jos $n \geq 1$, niin $11 \in \mathcal{F}(x)$, jolloin $00 \notin \mathcal{F}(x)$, sillä sana x on tasapainotettu. Tällöin on oltava, että $m = 0$. Samoin jos $m \geq 1$, niin $n = 0$. Toisaalta jos $n = m = 0$, niin $00, 11 \in \mathcal{F}(x)$, mikä on mahdotonta. Päätellään, että aina toinen luvuista n ja m on 0 ja toinen suurempi tai yhtä suuri kuin 1.

Edeltävästä lemmasta saadaan helposti seurauksena tieto siitä minkälainen Sturmin sanojen muoto on.

Seuraus 6.13. *Olkoon x Sturmin sana. Tällöin $x \in 1^k \cdot \{01^n, 01^{n+1}\}^\omega$, missä $n \geq 0$ ja $0 \leq k \leq n+1$. Erityisesti Sturmin sanan tekijäjoukko on ketjusuljettu.*

Todistus. Tiedetään, että aakkonen 0 esiintyy Sturmin sanassa x äärettömän usein. Tämän tiedon ja edeltävän lemman 6.12 avulla nähdään, että ensimmäisen symbolin 0 esiintymisen jälkeen sanan x loppuosa koostuu vain sanoista 01^n ja 01^{n+1}. Ennen ensimmäistä symbolia 0 esiintyy mahdollisesti k kappaletta aakkosia 1. Siispä $x \in 1^k \cdot \{01^n, 01^{n+1}\}^\omega$. Jos $k \geq n+2$, niin $\delta(1^{n+2}, 01^n0) = 2$, mikä on ristiriita, sillä sana x on tasapainotettu. Täten päätellään, että $0 \leq k \leq n+1$.

Olkoon u mikä tahansa sanan x tekijä, joka esiintyy ensimmäisen aakkosen 0 jälkeen. Tekijä u voidaan laajentaa ketjuksi valitsemalla se ketju, joka alkaa ensimmäisestä aakkosesta 0 ja päättyy ensimmäiseen aakkoseen 0 tekijän u jonkin esiintymän jälkeen. Toisaalta sanan x ennen aakkosta 0 esiintyvät symboleista 1 koostuvat tekijät laajenevat ketjuksi $01^{n+1}0$. Näin ollen sanan x tekijäjoukko on ketjusuljettu. □

Lemma 6.14. *Olkoon x Sturmin sana. Tällöin $|X_n| = |Y_n| = n$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Ensinnäkin koska Sturmin sanat ovat jaksottomia, niin lauseesta 6.2 seuraa, että $|X_n| \geq n$ ja $|Y_n| \geq n$ kaikilla $n \geq 0$. Toisaalta tiedetään, että Sturmin sanat ovat tasapainotettuja. Näin ollen lemma 6.9 kertoo, että sana x on ketjutasapainotettu. Edeltävän seurauksen 6.13 mukaan sanan x tekijäjoukko on ketjusuljettu. Täten voidaan soveltaa lemmaa 6.11, jolloin saadaan, että $|X_n| \leq n$ ja $|Y_n| \leq n$ kaikilla $n \geq 0$. □

Tulos voidaan todistaa myös käyttämättä lemmaa 6.11, vaikkakin samantyyppisiä argumentteja tarvitaan silti.

Toinen todistus lemmalle 6.14. Osoitetaan, että $|X_n| = n$ kaikilla $n \geq 0$. Joukolle Y_n perustelut menevät samaan tapaan. Ensinnäkin $X_0 = \emptyset$ ja $X_1 = \{0\}$, joten väite on voimassa tapauksissa $n = 0, 1$. Oletetaan sitten, että väite on voimassa luvulle $n \geq 1$. Koska sana x on jaksoton, niin lauseen 6.2 nojalla $|X_{n+1}| \geq n+1$. Muista, että joukon X_n sanat voidaan laajentaa joukon X_{n+1} sanoiksi. Oletetaan sitten, että kaksi erisuurta sanaa $u, v \in X_n$ laajenevat kumpikin ainakin kahdeksi joukon X_{n+1}

sanaksi. Lemman 6.12 mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku k, että $01^*0 \cap \mathcal{F}(x) = \{01^k0, 01^{k+1}0\}$. Sanojen u ja v laajennuksien joukkoon X_{n+1} on siis oltava sanat

$$u1^k0,\ u1^{k+1}0,\ v1^k0 \text{ ja } v1^{k+1}0. \tag{6.1}$$

Olkoon z sanojen u ja v pisin yhteinen suffiksi. Suffiksia z edeltää sanassa u aakkonen a, jolloin suffiksia z edeltää sanassa v aakkonen $\hat{a}$. Soveltamalla tätä sopiviin tekijöihin (6.1) nähdään, että välttämättä $0z1^k0, 1z1^{k+1} \in \mathcal{F}(x)$, mikä on ristiriita sen kanssa, että sana x on tasapainotettu. Tämä osoittaa, että korkeintaan yksi joukon X_n sana laajenee kahdeksi joukon X_{n+1} sanaksi, eli $|X_{n+1}| \leq n+1$. Täten $|X_{n+1}| = n+1$, ja väite seuraa induktiolla. □

Olkoon x ääretön sana. Vain toinen ehdoista $|X_n| = n$ ja $|Y_n| = n$ ei riitä tekemään sanasta x Sturmin sanaa. Tarkastellaan esimerkkinä Fibonaccin sanaa $f = 01001010\cdots$ Sana $00f$ ei ole Sturmin sana, sillä sillä on tekijöinä sanat 000 ja 101. Kuitenkin kaikilla $n \geq 0$ on voimassa, että $|Y_n(00f)| = n$, sillä selvästikin $Y_n(f) = Y_n(00f)$. Joukot X_n eivät myöskään ole erityisasemassa, mikä nähdään soveltamalla samankaltaista argumenttia sanaan $\hat{f}$, joka on myös Sturmin sana (ks. seuraus 5.27, $\hat{f} = E(f)$).

Huomaa, että jos äärettömälle sanalle x on voimassa, että $|X_n| = |Y_n| = n$ kaikilla $n \geq 0$, niin aakkoset 0 ja 1 esiintyvät siinä äärettömän usein. Nimittäin jos esimerkiksi aakkonen 0 esiintyy vain k kertaa sanassa x, niin $|X_{k+1}| = 0$.

Lemma 6.15. *Olkoon x sellainen ääretön sana, että $|X_n| = |Y_n| = n$ kaikilla $n \geq 0$. Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut $m \geq 0$ ja $k, 0 \leq k \leq m+1$, että $x \in 1^k \cdot \{01^m, 01^{m+1}\}^\omega$.*

Todistus. Koska $|X_2| = 2$, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut n ja m, $n < m$, että $01^*0 \cap \mathcal{F}(x) = \{01^n0, 01^m0\}$. Lisäksi koska $|X_3| = 3$, niin täsmälleen kolme seuraavista sanoista on sanan x tekijä:

$$w_1 = 01^n01^n0,\ w_2 = 01^m01^m0,\ w_3 = 01^n01^m0 \text{ ja } w_4 = 01^m01^n0.$$

Välttämättä sanat w_3 ja w_4 ovat sanan x tekijöitä. Nimittäin jos esimerkiksi sana $w_3 \notin \mathcal{F}(x)$, niin koska $01^n0 \in \mathcal{F}(x)$, niin

$$w \in 1^*0(1^m0)^*(1^n0)^* \cdot \{(1^n0)^\omega, 1^\omega\},$$

mikä tarkoittaa, että sana x on lopulta jaksollinen. Tämä on mahdotonta lauseen 6.2 nojalla. Vastaavasti näytetään, että välttämättä $w_4 \in \mathcal{F}(x)$.

Jos $m = n+1$, niin väite on selvä. Oletetaan sitten, että $n = m+2+p$, missä $p \geq 0$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$w_3 = 01^p1^21^m01^m0 \text{ ja}$$
$$w_4 = 01^m01^m1^21^p0.$$

Lisäksi on olemassa sellainen kokonaisluku $j \geq 0$, että $w_30^j1 \in \mathcal{F}(x)$. Jos $m \neq 0$, niin sanat

$$101^m0^{1+j}1,\ 11^m1,\ 11^q01^{m-q}1 \in Y_{m+2},$$

missä $0 \leq q \leq m$. Antamalla luvun q käydä kaikki mahdolliset arvonsa saadaan, että $|Y_{m+2}| \geq m+3$, mikä on ristiriita. Oletetaan sitten, että $m = 0$. Tällöin $11 \in \mathcal{F}(x)$. Koska $|Y_2| = 2$, niin on olemassa sellainen kokonaisluku k, että $Y_2 = \{11, 10^k1\}$. Koska kumpikin aakkonen esiintyy sanassa x äärettömän usein, niin saadaan, että $x = u(1^na^k)^\omega$ jollain sanalla u. Tämä on ristiriita, sillä sana x on jaksoton. Ristiriitojen perusteella nähdään, että $m = n+1$.

Sanan x muodosta nähdään, että on olemassa sellainen luku $k \geq 0$, että $1^k \leq x$. Osoitetaan, että $k \leq n+1$. Tehdään vastaoletus, että $k \geq n+2$. Jos $n \neq 0$, niin lukemalla sanan alusta erilaisia joukon Y_{n+2} tekijöitä nähdään, että $|Y_{n_2}| \geq n+3$, mikä on mahdotonta. Jos taas $m = 0$, niin kuten aiemmin, nähdään, että $Y_2 = \{11, 1a^k1\}$ jollain luvulla $k \geq 0$, jolloin $x = u(10^k)^\omega$, mikä myöskään ei ole mahdollista. □

Huomaa, että joukon $1^k \cdot \{01^n, 01^{n+1}\}^\omega$ kaikki sanat eivät ole Sturmin sanoja. Esimerkiksi, kun $n = 1$, niin voidaan konstruoida ääretön sana w, jolla on tekijöinä sanat $0(10)^4$ ja $0(110)^211$. Tällöin kuitenkin $\delta(0(10)^4, 0(110)^211) = 2$, joten sana w ei ole Sturmin sana.

Seuraava lemma on vain toisenlainen versio lemmasta 6.15. Sen todistus menee samoin, kunhan vaihdetaan aakkosten 0 ja 1 roolit, sekä joukkojen X_n ja Y_n roolit.

Lemma 6.16. *Olkoon x sellainen ääretön sana, että $|X_n| = |Y_n| = n$ kaikilla $n \geq 0$. Tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut $m \geq 0$ ja $k, 0 \leq k \leq m+1$, että $w \in 0^k \cdot \{10^m, 10^{m+1}\}^\omega$.* □

Ennen seuraavan lemman todistusta tarkastellaan miten morfismit $(E\circ\varphi)^k$ ja $(E\circ\widetilde{\varphi})^k$ käyttäytyvät. Ensinnäkin $(E\circ\varphi)(1) = 1$, joten myös $(E\circ\varphi)^k(1) = 1$. Toiseksi $(E \circ \varphi)(0) = 10$. Induktion avulla saadaan, että $(E \circ \varphi)^k(0) = (E \circ \varphi)(1^{k-1}0) = 1^k0$. Samoin tapaan näytetään, että $(E \circ \widetilde{\varphi})^k(0) = 01^k$ ja $(E \circ \widetilde{\varphi})^k(1) = 1$.

Todistuksessa merkintä $1^{-k}f(u)$ tarkoittaa sitä, että sanan $f(u)$ alusta poistetaan k kappaletta aakkosia 1.

Lemma 6.17. *Olkoon x sellainen ääretön sana, että $|X_n| = |Y_n| = n$ kaikilla $n \geq 0$. Tällöin on olemassa sellainen Sturmin sana s ja sellainen Sturmin morfismi f, että $x = f(s)$. Erityisesti sana x on Sturmin sana.*

Todistus. Lemman 6.15 mukaan $x \in 1^k \cdot \{01^m, 01^{m+1}\}^\omega$, missä $m \geq 0$ ja $0 \leq k \leq m + 1$.

Tapaus 1°. Oletetaan, että $k < m + 1$. Muotoiltuna toisin edeltävä tarkoittaa, että $x \in \{1^k01^{m-k+1}, 1^k01^{m-k}\}^\omega$. Täten sana x voidaan tulkita sanaksi yli aakkoston $\{1^k01^{m-k+1}, 1^k01^{m-k}\}$. Tarkemmin ilmaistuna on olemassa sellainen ääretön sana z ja sellainen morfismi f, että $x = f(z)$ ja $f(0) = 1^k01^{m-k}$ ja $f(1) = 1^k01^{m-k+1}$. Itse asiassa morfismi $f = (E\circ\widetilde{\varphi})^{m-k}\circ(E\circ\varphi)^k\circ\varphi\circ E$. Todistusta edeltävien laskelmien perusteella esimerkiksi $f(0) = ((E\circ\widetilde{\varphi})^{m-k}\circ(E\circ\varphi)^k)(0) = (E\circ\widetilde{\varphi})^{m-k}(1^k0) = 1^k01^{m-k}$.

Olkoon $n > 0$. Määritellään kuvaus $g : \mathcal{F}_n(z) \to X_{n+1}(x)$ kaavalla $g(u) = 1^{-k}f(u)1^k0$. Huomaa, että sanat $g(u)$ todella ovat $(n + 1)$-ketjuja: sanaa $f(u)$ seuraa sanassa x välttämättä tekijä 1^k0, joten todellakin $g(u) \in X_{n+1}$. Kuvaus g on siis hyvinmääritelty. Koska jokaista $(n + 1)$-ketjua v kohti voidaan valita sellainen $u \in \mathcal{F}_n(z)$, että $v = g(u)$, niin on kuvaus g surjektio. Kuvaus g on myös injektio, sillä kuvaus f on injektio. Näin ollen $|\mathcal{F}_n(z)| = |X_{n+1}(x)| = n + 1$. Sana z on siis Sturmin sana. Seurauksen 5.27 mukaan kuvaus f on Sturmin morfismien yhdisteenä Sturmin morfismi. Täten myös sana x on Sturmin sana.

Tapaus 2°. Oletetaan, että $k = m + 1$. Nyt $x \in \{1^m0, 1^{m+1}0\}^\omega$. Kuten edellisessä kohdassa, on olemassa sellainen ääretön sana z, että $x = f(z)$, missä f on morfismi, jolle $f(0) = 1^m0$ ja $f(1) = 1^{m+1}0$. Samaan tapaan kuin edellä nähdään, että $f = (E \circ \varphi)^m \circ \widetilde{\varphi} \circ E$. Tässäkin tapauksessa morfismi f on Sturmin morfismi. Olkoot $n > 0$ ja u sanan z n-tekijä. Määritellään jälleen kuvaus $g : \mathcal{F}_n(z) \to X_{n+1}$ asettamalla, että $g(u) = 1^{-m}f(u)0$, jos sana u alkaa aakkosella 0 ja $g(u) = 1^{-m-1}f(u)0$, jos sana u alkaa aakkosella 1. Kuten edellä joukkojen $\mathcal{F}_n(z)$ ja $X_{n+1}(x)$ sanat vastaavat bijektiivisesti toisiaan. Näin ollen myös tässä tapauksessa sana x on Sturmin sana. $\square$

Lause 6.18. *Olkoon x ääretön sana. Seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) *sana x on Sturmin sana,*

(ii) *sana x on tasapainotettu ja jaksoton,*

(iii) *sana x on ketjusuljettu, ketjutasapainotettu ja jaksoton,*

(iv) $|X_n| = |Y_n| = n$ *kaikilla* $n \geq 0$.

Todistus. Lause 4.13 osoittaa, että kohdat (i) ja (ii) ovat ekvivalentit.

Seurauksen 6.13 mukaan Sturmin sanan tekijäjoukko on ketjusuljettu. Täten seuraus 6.10 ja edeltävä osa todistusta osoittavat, että kohdat (i) ja (iii) ovat ekvivalentit.

Ekvivalenssin $(i) \iff (iv)$ näyttävät lemmat 6.14 ja 6.17. $\square$

Osoitetaan lauseen seurauksena pikku tulos. Seuraavassa väitteessä luvut k ja m ovat lemman 6.13 antamat luvut.

Seuraus 6.19. *Olkoon $x \in 1^k \cdot \{01^m, 01^{m+1}\}$ Sturmin sana. Merkitään $y = 1^{-k}x$. Tällöin myös sanat $u = 1^t y, 0 \leq t \leq m+1$ ja $v = 01^{m+1}y$ ovat Sturmin sanoja. Erityisesti ainakin toinen sanoista $0x$ ja $1x$ on Sturmin sana.*

Todistus. Ensinnäkin lemman 4.3 mukaan sanan x suffiksina sana y on Sturmin sana. Sanat u ovat ketjusuljettuja, sillä sanan y eteen lisättiin korkeintaan $m+1$ kappaletta aakkosia 1, jolloin lisätty osa voidaan laajentaa jommaksi kummaksi 2-ketjuista 01^m0 ja $01^{m+1}0$. On selvää, että sanoissa u ja y on samat ketjut. Täten sana u on ketjutasapainotettu, koska sana y on. Lisäksi sanat u ovat tietenkin jaksottomia, sillä sana y on jaksoton. Näin ollen lauseen 6.18 mukaan sanat u ovat Sturmin sanoja. Samoin sana y on ketjusuljettu, ketjutasapainotettu ja jaksoton eli Sturmin sana.

Viimeinen väite seuraa siitä, että jos $m \geq 1$ ja $k < m$, niin sana $1x$ on edeltävän nojalla Sturmin sana. Jos taas $k = m$, niin molemmat sanoista $0x$ ja $1x$ ovat Sturmin sanoja – ts. sana x on karakteristinen sana (ks. s. 26). Lopuksi jos $k = m+1$, niin sana $0x$ on Sturmin sana. $\square$

7 Palindromikompleksisuus

Tässä luvussa esitetään luonnehdinta Sturmin sanoille palindromien avulla. Tuloksen esittivät ensi kertaa Droubay ja Pirillo artikkelissaan [DP99] vuonna 1999. Määritellään ensiksi tarvittavia käsitteitä ja merkintöjä.

7.1 Lisätietoja sanoista

Tässä aliluvussa esitettävät asiat ovat sanojen kombinatoriikan tunnettuja perustuloksia; lisätietoa löytyy mm. kirjan [Lot83] ensimmäisestä luvusta. Koska nämä tulokset ovat yleispäteviä, niin tämän aliluvun ajan oletetaan, että aakkosto on mielivaltainen.

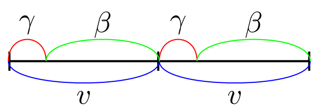
Sanotaan, että sanat x ja y ovat toistensa *konjugaatteja*, jos on olemassa sellaiset sanat u ja v, että $x = uv$ ja $y = vu$. Näin saatu konjugaattirelaatio on ekvivalenssirelaatio, ja sanan w ekvivalenssiluokkaa tämän relaation suhteen merkitään $\Gamma(w)$. Saattaa olla helpompi ajatella, että konjugaattiluokka $\Gamma(w)$ muodostuu edustajan w syklisistä permutaatioista. Toisin sanoen $\Gamma(w) = \{\gamma^n(w) : 0 \leq n < |w|\}$, missä kuvaus γ on määritelty seuraavasti:

$$\gamma : \begin{array}{l} \gamma(\varepsilon) = \varepsilon, \\ \gamma(au) = ua, \end{array}$$

missä a on aakkonen.

Lemma 7.1. *Olkoot v mikä tahansa äärellinen sana ja $r = |v|$. Sanan v^ω r-tekijät muodostavat sanan v kaikki konjugaatit.*

Todistus. Riittää tarkastella sanaa v^2, sillä pituutensa vuoksi kukin r-tekijä on sanan v^2 tekijä. Sana v^2 sisältää tekijöinään selvästi kaikki sanan v konjugaatit. Osoitetaan vielä, että jokainen r-tekijä on sanan v konjugaatti.



Olkoon u sanan v^2 r-tekijä. Tällöin voidaan kirjoittaa $v^2 = \alpha\beta\gamma\delta$, missä $v = \alpha\beta = \gamma\delta$ ja $u = \beta\gamma$. Nyt $|\beta| = r - |\gamma| = r - (r - |\delta|) = |\delta|$, joten $\beta = \delta$, ja täten $v = \gamma\beta$. Siis u on sanan v konjugaatti. $\square$

Lemma 7.2. *Olkoot v mikä tahansa äärellinen sana ja $r = |v|$. Tällöin sanan v^ω sellaiset tekijät u, joiden pituus on $|u| \geq r$, ovat jakautumattomia (sanan v^ω tekijöinä).*

Todistus. Todistetaan väite ensin r-tekijälle u. Oletetaan, että tekijällä u on kaksi oikeaa laajennusta ua ja $u\hat{a}$, missä a on aakkonen. Merkitsemällä $u = bu'$, missä b on aakkonen, saadaan kaksi r-tekijää $u'a$ ja $u'\hat{a}$. Edellisen lemman mukaan $u'a, u'\hat{a} \in \Gamma(v)$. Tämä on ristiriita, sillä näissä sanoissa on eri määrä aakkosia a, mutta luokan $\Gamma(v)$ sanoissa on oltava sama määrä aakkosia a, sillä kuvaus γ muuttaa vain aakkosten järjestystä. Tekijä u on siis jakautumaton.

Olkoon sitten y tekijä, jonka pituus $|y| \geq r$. Jos tekijä y on jakautuva, niin myös sen r-suffiksi on jakautuva, mikä on edeltävän mukaan mahdotonta. □

Määritelmä 7.3. Sana w on *primitiivinen*, jos se ei ole minkään toisen sanan potenssi. Siis ehdosta $w \in z^*$ seuraa, että $w = z$, kun $w \neq \varepsilon$.

Lemma 7.4. *Olkoon x sana. Jos on olemassa sellainen epäprimitiivinen sana y, että $y \in \Gamma(x)$, niin myöskään sana x ei ole primitiivinen.*

Todistus. Oletetaan, että $y = z^n \in \Gamma(x)$, jollain $n \geq 2$. Kirjoitetaan sitten $z^n = a_1 a_2 \cdots a_{|y|}$, missä $a_i \in A$. Tämä tarkoittaa, että $a_i = a_j$, kun $i \equiv j \pmod{|z|}$ ja $i, j \leq |y|$. Tätä seikkaa ei muuta sanan z^n kuvaaminen syklisellä permutaatiolla γ. Siis kaikki sanan $y = z^n$ konjugaatit – erityisesti sana x – ovat muotoa w^n jollain sanalla w. Sana x on siis epäprimitiivinen. □

Lemma 7.5. *Sanat u ja v kommutoivat (ts. $uv = vu$), jos ja vain jos on olemassa sellainen sana y, että $u, v \in y^*$.*

Todistus. ($\Longleftarrow$) Jos on olemassa sellainen sana y, että $u, v \in y^*$, niin sanat u ja v selvästi kommutoivat.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että sanan u ja v kommutoivat. Osoitetaan väite induktiolla luvun $|u| + |v|$ suhteen. Jos $|u| = |v| = 1$, niin väite on selvä. Rajoituksetta voidaan olettaa, että $|u| \geq |v|$. Tällöin on olemassa sellainen sana w, että $u = vw$. Jos $w = \varepsilon$, niin väite on jälleen selvä. Oletetaan, että $w \neq \varepsilon$. Nyt $uv = vwv = vu = vvw$, josta seuraa, että $wv = vw$. Koska $|w| + |v| < |u| + |v|$, niin induktio-oletuksesta seuraa, että on olemassa sellainen sana y, että $v = y^n$ ja $w = y^m$. Tällöin $u = vw = y^{n+m}$. Siis $u, v \in y^*$, mistä väite seuraa. □

7.2 Sturmin sanat ja palindromikompleksisuus

Olkoon x mikä tahansa sana. Sanan x kaikkien palindromitekijöiden joukkoa merkitään $\mathcal{Pal}(x)$. Lisäksi sellaisten palindromitekijöiden joukkoa, joiden pituus on n, merkitään $\mathcal{Pal}_n(x)$. Kompleksisuusfunktion kanssa analoginen *palindromikompleksisuusfunktio* $\mathcal{H}$ määritellään kaavalla

$$\mathcal{H}(x,n) = |\mathcal{Pal}_n(x)|.$$

Funktio laskee sanan x tietynpituisten palindromitekijöiden lukumäärän. Sanotaan, että ääretön sana x toteuttaa ehdon $\mathcal{Plc}_n(x)$, jos on voimassa, että

$$\mathcal{H}(x,n) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ 2, & \text{jos } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Jos tämä ehto on voimassa kaikilla $n \geq 0$, niin sanotaan, että sana x toteuttaa ehdon $\mathcal{Plc}(x)$.

Määritellään sitten selkeyden vuoksi muutamia lyhenteitä. Olkoon x ääretön sana. Mikäli sanalla x on täsmälleen yksi jakautuva $(n-1)$-tekijä, niin sanotaan, että sanalla x on ominaisuus $\mathcal{Spe}_n(x)$. Sanotaan, että sanalla x on ominaisuus $\mathcal{Bal}_n(x)$, jos joukko $\mathcal{F}_n(x)$ on tasapainotettu. Jos ehdosta $w \in \mathcal{F}_n(x)$ seuraa, että $\widetilde{w} \in \mathcal{F}_n(x)$, niin sanotaan, että sanalla x on ominaisuus $\mathcal{Rev}_n(x)$. Jos määritellyt ehdot ovat voimassa kaikilla $n \geq 0$, niin sanalla x on ominaisuudet $\mathcal{Spe}(x), \mathcal{Bal}(x)$ ja $\mathcal{Rev}(x)$.

Todistetaan sitten Droubayn ja Pirillon lause. Se seuraa välittömästi väitettä seuraavista lemmoista 7.7 ja 7.8.

Lause 7.6. *Ääretön sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos se toteuttaa ehdon $\mathcal{Plc}(x)$.* □

Aiempien tulosten perusteella voidaan jo helposti osoittaa, että jos x on Sturmin sana, niin $\mathcal{H}(x,n) \geq 1$, kun n on parillinen. Olkoon n parillinen luku. Lauseen 4.14 mukaan $\mathcal{F}_n(x) = \widetilde{\mathcal{F}}_n(x)$. Koska luku $\mathcal{P}(x,n) = n+1$ on pariton, niin ainakin yksi n-tekijä kuvautuu peilauksessa itsekseen. Tämä tarkoittaa, että kyseinen sana on palindromi.

Lemma 7.7. *Jos x on Sturmin sana, niin se toteuttaa ehdon $\mathcal{Plc}(x)$.*

Todistus. Ensinnäkin $\mathcal{Pal}_1(x) = \{0, 1\}$ ja $\mathcal{Pal}_2(x) = \{00\}$ tai $\mathcal{Pal}_2(x) = \{11\}$ (sillä x on tasapainotettu). Väite on siis voimassa, kun $n = 1, 2$.

Olkoon $n \geq 1$. Määritellään kuvaus $\gamma_n : \mathcal{Pal}_{n+2}(x) \to \mathcal{Pal}_n(x), aua \mapsto u$, kun a on aakkonen. Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus γ_n on bijektio. Väite seuraa, sillä tällöin $\mathcal{H}(x, n) = \mathcal{H}(x, 1) = 2$, kun n on pariton, ja $\mathcal{H}(x, n) = \mathcal{H}(x, 2) = 1$, kun n on parillinen.

Kuvaus γ_n on injektio, sillä jos $\gamma_n(w) = \gamma_n(w') = u$ ja $w \neq w'$, niin on oltava, että $w = 0u0$ ja $w' = 1u1$, mutta tällöin sana x ei ole tasapainotettu, mikä on ristiriita.

Näytetään sitten, että kuvaus γ_n on surjektio. Olkoon $u \in \mathcal{Pal}_n(x)$. Koska Sturmin sanat ovat toistavia (ks. lemma 4.3), niin sanalla x on tekijä bu, missä b on aakkonen. Oletetaan, että $b = 0$, tapaus $b = 1$ on symmetrinen. Jos $0u0 \in \mathcal{F}(x)$, niin väite on selvä, sillä $0u0 \in \mathcal{Pal}_{n+2}(x)$. Oletetaan, että $0u1 \in \mathcal{F}(x)$. Tällöin Sturmin sanojen ominaisuuden $\mathcal{Rev}(x)$ (ks. lause 4.14) nojalla $(0u1)^{\sim} = 1u0 \in \mathcal{F}(x)$. Täten u on sanan x jakautuva n-tekijä. Olkoon v sanan x jakautuva $(n+1)$-tekijä. Sturmin sanan jakautuvalla tekijällä on aina suffiksina kaikki lyhyemmät jakautuvat tekijät – muutoinhan olisi ainakin kaksi jakautuvaa tietynpituista tekijää. Täten $v = cu$ jollain aakkosella c, ja koska v on jakautuva, niin $vc = cuc \in \mathcal{F}(x)$. Siis $cuc \in \mathcal{Pal}_{n+2}(x)$ ja $\gamma_n(cuc) = u$. Kuvaus γ_n on siis surjektio. $\square$

Seuraava lemma osoittaa käänteisen väitteen, ja näyttää, että ehdosta $\mathcal{Plc}(x)$ seuraa suoraan myös Sturmin sanojen ominaisuudet $\mathcal{Bal}(x)$ ja $\mathcal{Rev}(x)$. Nämä ominaisuudet on aiemmin osoitettu eri tavoin, ks. lauseet 4.13 ja 4.14.

Lemma 7.8. *Jos äärettömällä sanalla x on ominaisuus $\mathcal{Plc}(x)$, niin sana x on Sturmin sana. Lisäksi ovat voimassa $\mathcal{Bal}(x)$ ja $\mathcal{Rev}(x)$.*

Todistus. Olkoon x ääretön sana, joka toteuttaa ehdon $\mathcal{Plc}(x)$. Osoitetaan induktiolla luvun n suhteen, että ehdot $\mathcal{Spe}_n(x), \mathcal{Bal}_n(x)$ ja $\mathcal{Rev}_n(x)$ ovat voimassa kaikilla $n \geq 0$. Tällöin väite seuraa.

Koska $\mathcal{H}(x, 1) = 2$, niin sanassa x on oltava kaksi aakkosta, 0 ja 1. Täten sana ε on jakautuva. Lisäksi ε on ainoa sana, jonka pituus on 0, ja se on palindromi. Siis tapaus $n = 0$ on selvä. Oletetaan sitten, että $n \geq 1$.

Tapaus 1°. $\mathcal{B}al_{n+1}(x)$

Tehdään vastaoletus luku n on pienin sellainen luku, että $\mathcal{B}al_{n+1}(x)$ ei ole voimassa. Soveltamalla lemmaa 4.12 joukkoon $X = \bigcup_{i=0}^{n+1} \mathcal{F}_i(x)$ nähdään, että on olemassa sellainen palindromi w, että $0w0, 1w1 \in \mathcal{F}_{n+1}(x)$. Siis oletuksen nojalla on oltava, että $\mathcal{P}al_{n+1}(x) = \{0w0, 1w1\}$, mikä tarkoittaa, että luku $n+1$, ja täten myös luku $n-1$, on pariton. Lisäksi huomataan, että tekijä w on jakautuva.

Oletuksen nojalla nähdään, että $\mathcal{P}al_{n-1}(x) = \{w, t\}$, missä t on palindromi ja $t \neq w$. Koska $t \in \mathcal{F}_{n-1}(x)$, niin $ta \in \mathcal{F}_n(x)$ jollain aakkosella a. Koska induktio-oletuksen mukaan $\mathcal{R}ev_n(x)$ on voimassa, niin myös $(ta)^\sim = at \in \mathcal{F}_n(x)$. Koska tekijä w on jakautuva, niin tekijä t ei ole. Täten siitä, että $at \in \mathcal{F}_n(x)$ seuraa, että $ata \in \mathcal{F}_{n+1}(x)$. Koska ata on myös palindromi ja $w \neq t$, niin $\mathcal{H}(x, n+1) = |\{0w0, 1w1, ata\}| = 3$, mikä on ristiriita.

Tapaus 2°. $\mathcal{S}pe_{n+1}(x)$

Tehdään vastaoletus, että $\mathcal{S}pe_{n+1}(x)$ ei ole voimassa. Tällöin on olemassa ainakin kaksi jakautuvaa $(n+1)$-tekijää tai tällaisia tekijöitä ei ole yhtäkään.

Olkoot u ja v kaksi erisuurta jakautuvaa $(n+1)$-tekijää. Olkoon sana w sanojen u ja v pisin yhteinen suffiksi, jollain $u = u'aw$ ja $v = v'\hat{a}w$, missä a on aakkonen. Koska u ja v ovat jakautuvia, niin sanalla x on tekijät awa ja $\hat{a}w\hat{a}$. Mutta tällöin $\delta(awa, \hat{a}w\hat{a}) = 2$, jolloin ehto $\mathcal{B}al_m(x)$ ei olekaan voimassa jollain $m \leq n+1$. Tämä ristiriita osoittaa, että jakautuvia $(n+1)$-tekijöitä ei ole lainkaan. Tällöin lauseen 3.7 mukaan sana x on lopulta jaksollinen. Kirjoitetaan $x = ty^\omega$ joillain sanoilla t ja y, ja valitaan sanan x jaksonpituus $r = |y|$ lyhimmäksi mahdolliseksi.

Oletetaan, että sanan x jaksonpituus r on parillinen. Tällöin luku $s = 2|t| + r$ on myös parillinen, ja oletuksen mukaan $\mathcal{P}al_s(x) = \{p\}$. Koska sana p on palindromi, niin voidaan kirjoittaa $p = cp_r\widetilde{c}$, missä myös p_r on palindromi ja $|p_r| = r$. Huomaa, että nyt $|c| = |t|$. Täten luvun s valinnan nojalla sana p_r on sanan y^ω tekijä. Koska sana p on palindromi, ja r on parillinen, niin voidaan kirjoittaa $p_r = \widetilde{z}z$ jollakin sanalla z. Koska sana p_r on sanan y^ω tekijä ja $|p_r| = r = |y|$, niin lemman 7.1 mukaan $\widetilde{z}z \in \Gamma(y)$. Sanan $\widetilde{z}z$ konjugaattina myös palindromi $z\widetilde{z} \in \Gamma(y)$. Edelleen lemman 7.1 mukaan sana $z\widetilde{z}$ on sanan y^ω tekijä. Koska p_r on oletuksen mukaan yksikäsitteinen pituutta r oleva palindromi, niin on oltava, että $\widetilde{z}z = z\widetilde{z}$, jolloin $z = \widetilde{z}$. Täten koska $zz \in \Gamma(y)$, niin lemman 7.4 mukaan sana y on epäprimitiivinen. Tämä on ristiriita sanan y minimaalisuuden kanssa.

Oletetaan sitten, että jaksonpituus r on pariton. Tällöin myös luku $s = 2|t| + r$ on pariton, ja $\mathcal{Pal}_s(x) = \{p, q\}$. Kuten edellä, voidaan kirjoittaa, että $p = cp_r\widetilde{c}$ ja $q = dq_r\widetilde{d}$, missä p_r ja q_r ovat palindromeja, joiden pituus on r. Edelleen palindromit p_r ja q_r ovat sanan y^ω tekijöitä, joiden pituus on $r = |y|$, ja täten $p_r, q_r \in \Gamma(y)$. Lemman 7.2 mukaan nämä sanan y^ω tekijät ovat jakautumattomia, joten jos $p_r = q_r$, niin myös $p = q$, mikä on mahdotonta. Siis $p_r \neq q_r$, jolloin voidaan kirjoittaa, että $p_r = \alpha\beta$ ja $q_r = \beta\alpha$ joillain sanoilla α ja β. Koska r on pariton, niin $\alpha \neq \beta$. Rajoituksetta voidaan olettaa, että $0 < |\alpha| < |\beta|$. Tällöin $p_r = \alpha\beta = \alpha A\widetilde{\alpha}$ jollakin palindromilla A. Myös sana $\widetilde{\alpha}\alpha$ on palindromi. Täten $A\widetilde{\alpha}\alpha = q_r = \widetilde{q_r} = \widetilde{\alpha}\alpha A$. Sanat $\widetilde{\alpha}\alpha$ ja A siis kommutoivat, joten sana q_r ei ole primitiivinen (ks. lemma 7.5). Koska q_r on sanan y konjugaatti, niin myöskään sana y ei ole primitiivinen (ks. lemma 7.4), mikä on ristiriita sanan y minimaalisuuden kanssa.

Tapaus 3°. $\mathcal{Rev}_{n+1}(x)$

Koska induktio-oletuksen ja kohdan 2° nojalla $\mathcal{Spe}_m(x)$ on voimassa, kun $0 \leq m \leq n+1$, niin $\mathcal{P}(x, n+1) = n+2$. Täten luku

$$\left|\mathcal{F}_{n+1}(x) \setminus \mathcal{Pal}_{n+1}(x)\right| = \begin{cases} n, & \text{jos } n \text{ on parillinen,} \\ n+1, & \text{jos } n \text{ on pariton} \end{cases}$$

on aina parillinen. Poistamalla joukosta $|\mathcal{F}_{n+1}(x) \setminus \mathcal{Pal}_{n+1}(x)|$ kaikki parit $\{w, \widetilde{w}\}$ saadaan siis parillinen määrä $(n+1)$-tekijöitä w, joiden peilaukset $\widetilde{w} \notin \mathcal{F}_{n+1}(x)$. Tehdään sitten vastaoletus, että $\mathcal{Rev}_{n+1}(x)$ ei ole voimassa. Täten on olemassa ainakin kaksi sellaista erisuurta sanaa $w_1, w_2 \in \mathcal{F}_{n+1}(x)$, että $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \notin \mathcal{F}_{n+1}(x)$. Koska $n \geq 1$, voidaan kirjoittaa, että $w_1 = c\alpha c'$ ja $w_2 = d\beta d'$ joillain sanoilla α ja β ja aakkosilla c, c', d ja d'. Koska $\mathcal{Rev}_n(x)$ on voimassa, niin $\widetilde{\alpha}c$, $c'\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}d$ ja $d'\widetilde{\beta} \in \mathcal{F}_n(x)$ ja täten sanat $w_3 = c'\widetilde{\alpha}\hat{c}$ ja $w_4 = d'\widetilde{\beta}\hat{d} \in \mathcal{F}_{n+1}$. Muutoinhan jos esimerkiksi $c'\widetilde{\alpha}\hat{c} \notin \mathcal{F}_{n+1}$, niin $c'\widetilde{\alpha}c = (c\alpha c')^\sim = \widetilde{w}_1 \in \mathcal{F}_{n+1}(x)$, mikä on mahdotonta. Näin ollen sanat $\widetilde{\alpha}$ ja $\widetilde{\beta}$ ovat jakautuvia, ja koska $\mathcal{Spe}_{n-1}(x)$ on voimassa, niin $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}$ eli $\alpha = \beta$. Käymällä kaikki vaihtoehdot läpi saadaan viisi eri tapausta. Ensimmäinen tapaus on $c = \hat{d}, c' = d'$, jolloin $w_4 = c'\widetilde{\alpha}c = \widetilde{w}_1 \in \mathcal{F}_{n+1}(x)$, mikä on ristiriita. Muut neljä tapausta on lueteltu alla olevassa taulukossa.

Jokaisessa näistä tapauksista saadaan kaksi sanaa, jotka ovat ristiriidassa ehdon $\mathcal{Bal}_{n+1}(x)$ kanssa, joka todistettiin kohdassa 1°.

	$c = c'$	$c = \hat{c}'$
$c = d$	$w_1 = c\alpha c$	$w_2 = c\alpha c$
$c' = \hat{d}'$	$w_4 = \hat{c}\widetilde{\alpha}\hat{c}$	$w_3 = \hat{c}\widetilde{\alpha}\hat{c}$
$c = \hat{d}$	$w_1 = c\alpha c$	$w_3 = \hat{c}\widetilde{\alpha}\hat{c}$
$c' = \hat{d}'$	$w_2 = \hat{c}\alpha\hat{c}$	$w_4 = c\widetilde{\alpha}c$

Käydään esimerkkinä tapaus $c = \hat{c}', c = d, c' = d'$. Käyttäen näitä yhtälöitä saadaan, että $w_2 = d\alpha d' = c\alpha\hat{c}' = c\alpha c$ ja $w_3 = c'\widetilde{\alpha}\hat{c} = \hat{c}\widetilde{\alpha}\hat{c}$, jolloin $\delta(c\alpha c, \hat{c}\widetilde{\alpha}\hat{c}) = 2$, mikä ei ole mahdollista. $\square$

8 Luonnehdinta funktion $\mathcal{R}''$ avulla

Tässä luvussa tutkitaan Sturmin sanojen tapauksessa kysymystä ”Miten pitkä on lyhin sellainen sanan x tekijä, jolla on tekijöinään kaikki sanan x n-tekijät?”. Osoittautuu, että vastaus on yllättävän yksinkertainen, ja toisaalta, että vastaus luonnehtii Sturmin sanat täydellisesti. Luvun päätulos on lause 8.4, jonka Julien Cassaigne todisti vuonna 1998 artikkelissaan [Cas98]. Käytetyt merkinnät sekä kaikki tulokset ovat tästä artikkelista.

Ensimmäiseksi määritellään funktio, joka mittaa lyhimmän sellaisen sanan x tekijän pituutta, jolla on tekijöinään kaikki sanan x n-tekijät.

$$\mathcal{R}''(x,n) = \min\{m : \exists w \in \mathcal{F}_m(x) : \mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_n(w)\}.$$

Seuraavissa lemmoissa 8.1 ja 8.2 voidaan käyttää aakkoston $\{0,1\}$ sijaan mitä tahansa aakkostoa A.

Lemma 8.1. *Olkoon x ääretön sana. Tällöin $\mathcal{R}''(x,n) \geq \mathcal{P}(x,n) + n - 1$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Merkitään $x = a_1a_2\cdots$, $a_i \in A$. Oletetaan, että indeksin i kohdalla sanan x n-tekijät sijaitsevat mahdollisimman lähellä toisiaan (jossakin järjestyksessä). Erilaisia n-tekijöitä on $r = \mathcal{P}(x,n)$ kappaletta. Toisin sanoen tekijät $[i, i+n-1], [i+1, i+n-1+1], \ldots, [i+(r-1), i+n-1+(r-1)]$ käsittävät kaikki r n-tekijää. Niiden yhdessä muodostaman tekijän pituus on $n+r-1$, mikä on selvästi alaraja luvulle $\mathcal{R}''(x,n)$. $\square$

Tutkitaan sitten funktion $\mathcal{R}''$ käyttäytymistä lopulta jaksollisten sanojen tapauksessa.

Lemma 8.2. *Olkoon $x = uv^\omega$ lopulta jaksollinen sana. Tällöin $\mathcal{R}''(x,n) \leq |uv| + n - 1$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. Lauseen 3.7 todistuksen kohdasta $(i) \Longrightarrow (iv)$ nähdään, että sanan x kaikki erilaiset n-tekijät esiintyvät ainakin kerran prefiksissä, jonka pituus on $|uv| + n - 1$. Tästä väite seuraa. $\square$

Määritelmä 8.3. Äärettömän sanan x tekijää w kutsutaan *vasemmalta jakautuvaksi*, jos $0w, 1w \in \mathcal{F}(x)$.

Muistetaan, että Sturmin sanan tekijäjoukko on peilauksen suhteen suljettu (ks. lause 4.14). Edeltävän määrittelyn nojalla n-tekijä w on vasemmalta jakautuva, jos ja vain jos tekijä $\widetilde{w}$ on (oikealta) jakautuva. Lisäksi tiedetään, että Sturmin sanoilla on täsmälleen yksi jakautuva n-tekijä. Näin ollen on osoitettu, että Sturmin sanoilla on täsmälleen yksi vasemmalta jakautuva n-tekijä kaikilla $n \geq 0$.

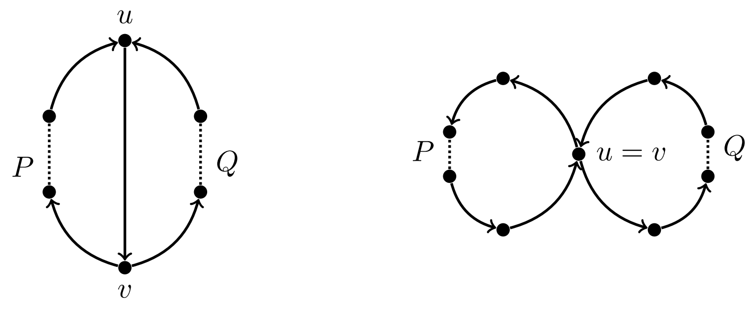
Olkoon x ääretön sana. Jokaista sanan x n-tekijää w seuraa jokin aakkonen a. Tekijällä wa on suffiksina n-tekijä w'. Sanotaan, että n-tekijää w *seuraa* n-tekijä w'. Jos w on (oikealta) jakautuva, niin sitä seuraa useita eri n-tekijöitä (binäärisanojen tapauksessa kaksi). Vastaavasti jos n-tekijä w on oikealta jakautuva, niin sitä *edeltää* useita eri n-tekijöitä.

Lause 8.4. *Olkoon x ääretön sana. Sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos $\mathcal{R}''(x, n) = 2n$ kaikilla $n \geq 0$.*

Todistus. ($\Longleftarrow$) Oletetaan, että $\mathcal{R}''(x, n) = 2n$ kaikilla $n \geq 0$. Lemman 8.1 mukaan $\mathcal{P}(x, n) \leq n + 1$. Jos $\mathcal{P}(x, n) \leq n$, niin lauseen 3.7 mukaan sana x on lopulta jaksollinen. Kirjoitetaan $x = uv^\omega$. Nyt lemmasta 8.2 seuraa, että $\mathcal{R}''(x, n) \leq |uv| + n - 1$, mikä on ristiriidassa oletuksen $\mathcal{R}''(x, n) = 2n$ kanssa suurilla luvun n arvoilla. Täten $\mathcal{P}(x, n) = n + 1$ kaikilla $n \geq 0$. Sana x on siis Sturmin sana.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että sana $x = a_1 a_2 \cdots$, $a_i \in A$, on Sturmin sana. Väitettä edeltävien huomautusten mukaan sanalla x on täsmälleen yksi vasemmalta jakautuva n-tekijä u ja täsmälleen yksi oikealta jakautuva n-tekijä v. Tällöin on kaksi mahdollisuutta: joko $u \neq v$ tai $u = v$.

Tarkastellaan jonoa, joka koostuu n-tekijöistä, jotka seuraavat jotakin mielivaltaisesti valittua n-tekijää. Tämä jono käy läpi kaikki n-tekijät äärettömän monta kertaa, sillä sana x on toistava (ks. lemma 4.3). Tarkastellaan sitten jonoa n-tekijöitä kahden tekijän v peräkkäisen esiintymän välillä. Tällaisia jonoja on kahta tyyppiä P ja Q, sillä tekijä v on jakautuva. Koska jonoissa P ja Q esiintyy vain jakautumattomia n-tekijöitä, niin jonot määräytyvät yksikäsitteisesti tekijän v ensimmäistä esiintymää seuraavasta aakkosesta. Koska tekijä u on vasemmalta jakautuva, niin sen on esiinnyttävä molemmissa jonoista P ja Q. Muutoin tekijä u esiintyisi vain toisessa niistä, ja se olisi vasemmalta jakautumaton. Lisäksi jonot P ja Q sisältävät kaikki sanan x n-tekijät tekijää v lukuun ottamatta. Alla olevista kuvista nähdään millaista muotoa jonot ovat. Vasempi kuva ilmaisee tapauksen $u \neq v$ ja oikea tapauksen $u = v$.



Koska sana x on toistava, on mahdollista valita sellaiset peräkkäiset sanan v esiintymät, että molemmat jonot P ja Q esiintyvät peräjälkeen. Tapauksessa $u \neq v$ valitaan jono, joka koostuu kuvan reitin $v \xrightarrow{\text{P}} u \to v \xrightarrow{\text{Q}} u$ määräämistä n-tekijöistä poislukien ensimmäinen n-tekijä v ja viimeinen n-tekijä u. Tapauksessa $u = v$ valitaan reitin $u = v \xrightarrow{\text{P}} u = v \xrightarrow{\text{Q}} u = v$ määräämät n-tekijät jälleen poislukien ensimmäinen ja viimeinen n-tekijä v. Tämä jono käy täsmälleen kerran kaikki sanan x n-tekijät (jossakin järjestyksessä). Koko valittua jonoa vastaavan sanan x tekijän pituus on $\mathcal{P}(x, n)+n-1 = 2n$. Näin ollen $\mathcal{R}''(x, n) \leq 2n$. Toisaalta lemman 8.1 nojalla $\mathcal{R}''(x, n) \geq \mathcal{P}(x, n)+n-1 = 2n$. Siispä $\mathcal{R}''(x, n) = 2n$. □

Koska Sturmin sanoilla on $n+1$ erilaista n-tekijää, niin edellinen tulos kertoo itse asiassa, että jossain vaiheessa Sturmin sanan n-tekijät esiintyvät kaikki peräkkäin mahdollisimman tiiviisti jossain järjestyksessä. Muillakin sanoilla kuin Sturmin sanoilla on tämä ominaisuus, ne ovatkin artikkelin [Cas98] tutkimusaihe.

9 Yhteenveto ja lisätietoja

Kootaan vielä yhteen todistetut luonnehdinnat. Alla oleva lause on kooste lauseista 4.13 (s. 17), 6.18 (s. 52), 5.17 (s. 31), 7.6 (s. 55) ja 8.4 (s. 61).

Lause 9.1. *Olkoon x ääretön sana. Seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

(i) sana x on Sturmin sana,

(ii) sana x on tasapainotettu ja jaksoton,

(iii) sana x on ketjusuljettu, ketjutasapainotettu ja jaksoton,

(iv) $|X_n(x)| = |Y_n(x)| = n$ kaikilla $n \geq 0$,

(v) sana x on irrationaalinen mekaaninen sana,

(vi) palindromikompleksisuusfunktio toteuttaa ehdon

$$\mathcal{H}(x,n) = \begin{cases} 1, & \textit{jos } n \textit{ on parillinen,} \\ 2, & \textit{jos } n \textit{ on pariton,} \end{cases}$$

(vii) $R''(x,n) = 2n$ kaikilla $n \geq 0$.

Kootaan yhteen vielä tutkielmassa osoitetut kiintoisimmat Sturmin sanojen perusominaisuudet.

Lemma 9.2 (ks. s. 11)**.** *Sturmin sanat ovat toistavia.*

Seuraus 9.3 (ks. s. 12)**.** *Sturmin sanan suffiksit ovat Sturmin sanoja.*

Lause 9.4 (ks. s. 18)**.** *Sturmin sanan x tekijäjoukko $\mathcal{F}(x)$ on peilauksen suhteen suljettu.*

Seuraava tulos kertoi, että jokainen Sturmin sana on pitkälti sanojen 01^n ja 01^{n+1} tulo jollakin $n \geq 0$.

Seuraus 9.5 (ks s. 48)**.** *Olkoon x Sturmin sana. Tällöin on olemassa sellaiset $n \geq 0$ ja $0 \leq k \leq n+1$, että $x \in 1^k \cdot \{01^n, 01^{n+1}\}^\omega$.*

Aliluvussa 5.5 tutkittiin Sturmin morfismeja ja osoitettiin seuraava tulos.

Seuraus 9.6 (ks s. 40)**.** *Morfismit $E, \varphi, \widetilde{\varphi}, G, \widetilde{G}, D$ ja $\widetilde{D}$ ovat Sturmin morfismeja.*

Mainitaan vielä kaksi luonnehdintaa, joita ei ole tutkielmassa muualla mainittu. On syytä vielä korostaa, että koko tutkielmassa esitetyt luonnehdinnat eivät kata kaikkia tunnettuja Sturmin sanojen luonnehdintoja. On myös todennäköistä, että niitä löydetään tulevaisuudessa lisää.

Vuonna 2002 Fagnot ja Vuillon esittivät Sturmin sanojen luonnehdinnan yleistetyn tasapainoisuuden avulla. Katsotaan sitten lyhyesti miten tämä tulos kuuluu.

Seuraavassa lauseessa merkintä $|w|_u$ tarkoittaa (epätyhjän) sanan u esiintymien lukumäärää sanassa w.

Lause 9.7 ([FV02]). *Olkoon x jaksoton ja ääretön sana. Sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos se toteuttaa ehdon*

$$|w| = |w'| \quad \Longrightarrow \quad ||w|_u - |w'|_u| \leq |u|$$

kaikilla sanan x tekijöillä w, w' ja $u \neq \varepsilon$. □

Lause on helppo todistaa toiseen suuntaan. Oletetaan, että ääretön ja jaksoton sana x toteuttaa lauseen ehdon. Valitaan sellainen u, että $|u| = 1$. Tällöin ehdon mukaan

$$|w| = |w'| \quad \Longrightarrow \quad ||w|_u - |w'|_u| = \delta(w, w') \leq 1,$$

mikä osoittaa, että sana x on Sturmin sana. Tämän vuoksi ehtoa kutsutaan yleistetyksi tasapainoisuudeksi.

Vuillon esitti vuonna 2001 artikkelissaan [Vui01] jälleen uuden luonnehdinnan Sturmin sanoille. Katsotaan lyhyesti miten hänen tuloksensa kuuluu.

Olkoon x ääretön sana. Joukko

$$i(x, w) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots\}$$

ilmaisee kohdat, joissa tekijä w esiintyy sanassa x. Toisin sanoen $[i_k, i_k + |w| - 1]_x = w$ ja kyseessä on sanan w k:s esiintymä sanassa x. Jos sana x on toistava, niin joukko $i(x, w)$ on ääretön kaikilla sanan x tekijöillä w.

Määritelmä 9.8. Olkoon x ääretön toistava sana. Merkitään $i(x, w) = \{i_1, i_2, \ldots\}$. Sanan x *palautussanojen* joukko yli sanan w on joukko

$$\mathcal{H}(x, w) = \{[i_k, i_{k+1} - 1]_x : k \geq 1\}.$$

Määritelmän idea välittyy parhaiten esimerkin avulla. Tarkastellaan sanaa $x = (0100100001)^\omega$. Merkitään sitten sanan 01 esiintymät, ts. määritetään joukon $i(x, 01)$ luvut:

$$x = (\underline{0}10\underline{0}1000\underline{0}1\underline{0}10\underline{0}1000\underline{0}1)^\omega.$$

Määritelmän mukaan sanan x palautussanajoukon yli sanan 01 muodostavat sanat, jotka alkavat kustakin alleviivatusta aakkosesta ja päättyvät juuri ennen seuraavaa alleviivattua aakkosta. Täten $\mathcal{H}(x, 01) = \{010, 01000, 01\}$.

Ennen Sturmin sanoja luonnehtivaa lausetta mainitaan miten palautussanojen lukumäärä liittyy sanan jaksollisuuteen.

Lause 9.9 ([Vui01]). *Toistava ääretön sana x on lopulta jaksollinen, jos ja vain jos on olemassa sellainen sana w, että $|\mathcal{H}(x, w)| = 1$.* □

Lause 9.10 ([Vui01]). *Olkoon x ääretön sana. Sana x on Sturmin sana, jos ja vain jos $|\mathcal{H}(x, w)| = 2$ kaikilla epätyhjillä sanan x tekijöillä w.* □

Huomaa, että jälleen kerran äärettömän sanan jaksollisuutta mittaa tietynlainen kompleksisuusfunktio, ja sanat joiden kohdalla ko. kompleksisuusfunktio käyttäytyy erittäin siististi ovat Sturmin sanoja.

10 Historiaa lyhyesti

Ilmeisesti ensimmäinen henkilö, jonka tutkimuksista on löydetty viittauksia Sturmin sanojen teoriaan, on Johann (Jean) Bernoulli III (1744–1807). Bernoulli pyrki (1772) määräämään säännön, jonka mukaan voisi etsiä luvun α moninkertoja lähimpänä olevat kokonaisluvut vain yhteenlaskun avulla. Lukua $n\alpha$ lähin kokonaisluku on $\lfloor n\alpha + \frac{1}{2} \rfloor$, joten Bernoullin ongelma palautuu modernein termein sanan $s(\alpha, \frac{1}{2})$ tutkimiseen. Bernoulli esitti ilman todistusta yhteyden säännön ja luvun α ketjumurtolukukehitelmän kanssa. A. A. Markov (1856–1922) osoitti vuonna 1882 Bernoullin säännöt oikeiksi ja myös laajensi niitä. E. B. Christoffel (1829–1900) (vuosina 1875 ja 1888) ja H. J. S. Smith (1826–1883) (vuonna 1876) löysivät toisistaan riippumatta vastaavia tuloksia kuin Bernoulli sanalle $s(\alpha, 0)$. [Ven70, s. 65–68] [AS03, s. 295–297]

Ensimmäinen laaja artikkeli Sturmin sanoista on Marston Morsen (1892–1977) ja Gustav Hedlundin (1904–1993) artikkeli ”Symbolic Dynamics II: Sturmian Trajectories” [MH40]. Sanojen kombinatoriikkaa ei tuolloin nykymuodossaan ollut vielä olemassa, ja artikkeli onkin nk. dynaamisten systeemien teoriaa. Morse ja Hedlund näyttävät yhteyden Sturmin sanojen ja differentiaaliyhtälön $y'' + \phi(x)y = 0$, missä $\phi(x)$ on jatkuva ja jaksollinen funktio, ratkaisujen nollakohtien välille. Nimitys ”Sturmian” on myös peräisin tästä artikkelista. Kirjoittavat antoivat nimen ranskalaisen matemaatikon Jacques Charles François Sturmin (1803–1855) mukaan; Sturm ei kuitenkaan ilmeisesti tutkinut Sturmin sanoihin liittyviä asioita lainkaan [AS03, s. 295]. Artikkelissa esitetään Sturmin sanojen konstruktio irrationaalisina mekaanisina sanoina, sekä osoitetaan, että sanat ovat sekä tasapainotettuja että ketjutasapainotettuja. Morsen ja Hedlundin käyttämä Sturmin sanojen määritelmä ei ole sama kuin tässä tutkielmassa. He määrittelevät Sturmin sanojen olevan sellaisia ketjutasapainotettuja (kenties kaksipuolisesti) äärettömiä sanoja, jotka ovat muotoa $01^{k_1}01^{k_2}0\cdots$ (tai kaksipuolisesti äärettömässä tapauksessa $\cdots 01^{k_0}01^{k_1}01^{k_2}0\cdots$). Tämä määritelmä kattaa suuremman luokan sanoja kuin tämän tutkielman määritelmä. Määritelmä on muuttunut ajan myötä: nykyään Sturmin sanat ovat yksinomaan oikealle (tai jos siltä tuntuu niin vasemmalle) äärettömiä sanoja.

Seuraavat merkkijulkaisut Sturmin sanojen teoriassa ovat Ethan Covenin (s. 1942) ja Hedlundin artikkelit ”Sequences with Minimal Block Growth I & II” [CH73] ja [Cov75] vuosina 1973 ja 1975. Näissä artikkeleissa tutkitaan (kaksipuolisesti) äärettömiä sanoja x, joille $\mathcal{P}(x,n) \leq n+1$, tai yleisemmin $\mathcal{P}(x,n) = n+c$ jollakin $c \geq 0$ jostain rajasta n lähtien. Ensimmäisessä artikkelissa on modernimmat todistukset ketjutasapainoisuuden ja tasapainoisuuden yhteydelle ja sille, että Sturmin sanojen kompleksisuusfunktio on $n+1$.

1970-luvulle mennessä karakteristisia sanoja (ks. s. 26) oli tutkittu jo laajalti. Karakteristisista sanoista kiinnostunut lukija löytää lisätietoja ja mainiot viitteet kirjallisuuteen kirjasta [AS03].

Sanojen kombinatoriikan käsitteet ovat oivallisia Sturmin sanojen tutkimuksessa. Sanojen kombinatoriikasta tuli suosittu ala viimeistään kirjan Combinatorics on Words [Lot83] myötä 1980-luvulla. 1990-luvulle tultaessa Sturmin sanojen tutkiminen oli voimakkaasti käynnissä, minkä huomaa jo tämän tutkielmankin viiteluettelosta. Klassisia luonnehdintoja lukuun ottamatta tässä tutkielmassa esitetyt luonnehdinnat ovat 1990-luvulta tai vain aavistuksen sen jälkeen.

Sturmin sanoja tutkitaan edelleen paljon ja lisäksi Sturmin sanoja on pyritty yleistämään. Yleistyksissä on pyritty etsimään luokka sellaisia sanoja, joissa on enemmän kuin kaksi aakkosta ja joilla on Sturmin sanojen tapaisia erityisiä ominaisuuksia. Ikävä kyllä näyttää siltä, että useat Sturmin sanojen ominaisuudet eivät yleisty, kuten esimerkiksi lauseen 9.1 kohdat (*ii*) ja (*v*) [Ber02]. Yleistyksistä mainittakoon Arnouxin–Rauzyn sanat ja nämä sanat yleistävät ns. *episturmin* sanat. Episturmin sanat ovat äärettömiä sanoja yli mielivaltaisen aakkoston, joiden tekijäjoukko on suljettu peilauksen suhteen ja joilla on korkeintaan yksi jakautuva n-tekijä kaikilla $n \geq 0$. Huomaa yhtäläisyys Sturmin sanojen ominaisuuksiin. Esimerkki episturmin sanasta on veikeästi nimetty *Tribonaccin sana*. Sana t määritellään yli aakkoston $\{0,1,2\}$ kaavoilla $t_0 = 0, t_1 = 01, t_2 = 0102, t_{n+3} = t_{n+2}t_{n+1}t_n$. Se alkaa seuraavasti:

$$t = 0102010010201010201001 02\cdots$$

Lisätietoja Sturmin sanojen yleistyksistä on artikkeleissa [Ber02] ja [GJ09].

Kirjallisuutta

[AS03] Jean-Paul Allouche ja Jeffrey Shallit. *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*. Cambridge University Press, 2003.

[And89] Ian Anderson. *A First Course in Combinatorial Mathematics*. Second Edition. Oxford University Press, 1989.

[Ber96] Jean Berstel. ”Recent Results in Sturmian Words”. Teoksessa: *Developments in Language Theory II*. Toim. J. Dassow, G. Rozenberg ja A. Salomaa. World Scientific, 1996, s. 13–24.

[Ber02] Jean Berstel. ”Recent Results on Extensions of Sturmian Words”. *International Journal of Algebra and Computation* 12 (2002), s. 371–385.

[Cas98] Julien Cassaigne. ”Sequences with Grouped Factors”. Teoksessa: *Developments in Language Theory III, Publications of Aristotle University of Thessaloniki*. 1998, s. 211–222.

[Cov75] E. M. Coven. ”Sequences with Minimal Block Growth II”. *Mathematical Systems Theory* 8.4 (1975), s. 376–382.

[CH73] E. M. Coven ja Gustav A. Hedlund. ”Sequences with Minimal Block Growth”. *Mathematical Systems Theory* 7.2 (1973), s. 138–153.

[Cri+93] D. Crisp et al. ”Substitution Invariant Cutting Sequences”. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 5 (1993), s. 123–138.

[DP99] Xavier Droubay ja Giuseppe Pirillo. ”Palindromes and Sturmian Words”. *Theoretical Computer Science* 223 (1999), s. 73–85.

[FV02] Isabelle Fagnot ja Laurent Vuillon. ”Generalized Balances in Sturmian Words”. *Discrete Applied Mathematics* 121.1-3 (2002), s. 83–101.

[GJ09] Amy Glen ja Jacques Justin. ”Episturmian Words: A Survey”. *Theoretical Informatics and Applications* 43.3 (2009), s. 403–442.

[Lot02] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90. Cambridge University Press, 2002.

[Lot83] M. Lothaire. *Combinatorics on Words.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 17. Addison-Wesley, 1983.

[MS93] Filippo Mignosi ja Patrice Séébold. ”Morphismes sturmiens et règles de Rauzy”. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 5 (1993), s. 221–233.

[MH38] Marston Morse ja Gustav A. Hedlund. ”Symbolic Dynamics”. *American Journal of Mathematics* 60 (1938), s. 815–866.

[MH40] Marston Morse ja Gustav A. Hedlund. ”Symbolic Dynamics II: Sturmian Trajectories”. *American Journal of Mathematics* 62 (1940), s. 1–42.

[Par97] Bruno Parvaix. ”Propriétés d'invariance des mots sturmiens”. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 9 (1997), s. 351–369.

[Ric99] Gwénaël Richomme. ”Another Characterization of Sturmian Words (One More)”. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science* 67 (1999), s. 173–175.

[Ven70] B. A. Venkov. *Elementary Number Theory.* Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.

[Vui01] Laurent Vuillon. ”A Characterization of Sturmian Words by Return Words”. *European Journal of Combinatorics* 22.2 (2001), s. 263–275.